

*Existuje holič, který holí muže, kteří se neholí sami. Kdo holí holiče?*

## 1 Stručná procházka historií aneb *Co je množina?*

Otázka „*Co je množina?*“ se na první pohled zdá jednoduchá – přece soubor prvků, které mají něco společného. Ale právě tahle jednoduchost se stala jedním z nejhlubších problémů moderní matematiky. Myšlenka „množiny“ totiž vykvetla z lidské snahy pochopit nekonečno.

Už antičtí filozofové rozlišovali potenciální a aktuální nekonečno. Potenciální nekonečno (např. možnost stále přičítat jednotku) je proces, který nikdy nekončí, zatímco aktuální nekonečno znamená, že nekonečná množina existuje jako celek.

V 17. století na matematickou scénu přicházejí Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz se základy diferenciálního a integrálního počtu. Jejich slavný spor o prvenství doprovázela i problematika *počítání s nekonečně malými veličinami*, tzv. *infinitesimální počet*. Přijmout nové metody infinitesimálního počtu znamenalo rovněž přijmout aktuální nekonečno jako matematický objekt. Mnozí byli této představě příznivě nakloněni, avšak napříč Evropou zaznívaly i hlasy kritiků, mezi nimiž byli například Michel Rolle či George Berkeley. A je se vlastně čemu divit? Jak můžeme vlastně s nekonečnem rigorózně pracovat?

V 19. století se aktuálním nekonečnem zabýval například český matematik Bernard Bolzano a především také Georg Cantor, který učinil rozhodující krok. Cantor považoval za množinu jakýkoliv souhrn objektů, kde o každém prvku je možné rozhodnout, zdali je, či není jejím prvkem. Dále dokázal, že existují *různě velká nekonečna* – například množina přirozených čísel je „menší“ než množina všech reálných čísel. Mohlo by se zdát, že Cantor našel odpověď na naši úvodní otázku, ale Bertrand Russell v jeho pojetí narazil na ožehavý problém.

Russell si řekl: „Uvažujme, že je dána množina  $S$ , která obsahuje všechny množiny takové, že nejsou samy sobě prvkem.“ Pokud by nám toto znění přišlo enigmatické, analogicky tuto úvahu zachycuje tzv. *paradox holiče* v záhlaví stránky. Paradox otřásl základy celé teorie. Reakcí na to byla **axiomatizace teorie množin** (Zermelo, Fraenkel, Hilbert), která přesně stanovila, co množina je a jak s ní smíme zacházet.

Dnes je teorie množin **základem moderní matematiky** – jazykem, v němž jsou formulovány všechny ostatní obory. Přesto zůstává v jádru stejná otázka, která kdysi trápila Cantora i Russella:

*Může člověk opravdu pochopit nekonečno, když sám je konečný?*

**Pro zvědavé čtenáře:**

- více k zamyšlení o množinách: Esence teorie množin,
- více o teorii množin se lze dočíst v pěkné bakalářské práci zde: Stručný úvod do teorie množin pro středoškoláky,
- více o sporu mezi Newtonem a Leibnizem se lze dozvědět zde: Newton and Leibniz: Crash Course History of Science.

## 2 Úlohy

*Množina (konečná/nekonečná), prvek množiny, mohutnost množiny, zápis množiny, rovnost množin*

1. Zapište dané množiny výčtem prvků a jsou-li konečné, určete jejich mohutnost.

- (a)  $A = \{a \in \mathbb{N}; |a| = 5\}$
- (b)  $B = \{a \in \mathbb{Z}; |a| = 5\}$
- (c)  $C = \{n \in \mathbb{N}; n|24\}$
- (d)  $D = \{n \in \mathbb{N}; n|24 \wedge n > 10\}$
- (e)  $E = \{n \in \mathbb{N}; n|24 \wedge n|15\}$
- (f)  $F = \{n \in \mathbb{N}; n < 10 \wedge n \geq 8\}$
- (g)  $G = \{n \in \mathbb{N}; n < 3 \Rightarrow n|6\}$
- (h)  $H = \{h \in \mathbb{Z}; \sqrt[3]{h} < 2 \Leftrightarrow (7 \leq h \leq 10 \vee h > 12)\}$

2. Pro jaké  $x \in \mathbb{Z}$  obsahuje interval  $A = \langle x; 3x - 2 \rangle$  právě 9 přirozených čísel?

3. Zapište výčtem množinu

$$M = \{x \in \mathbb{N}; (x < 15) \wedge [(x \bmod 3 < 2) \Rightarrow 2|x]\}.$$

*Podmnožina, prázdná množina, potenční množina, operace s množinami*

1. Vypište všechny podmnožiny množiny  $A = \{a, b, c\}$ .

2. Jsou dány množiny:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{b \in \mathbb{R}; b > 3\}, \quad C = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad D = (-5; 3).$$

Zapište výčtem nebo intervalem:

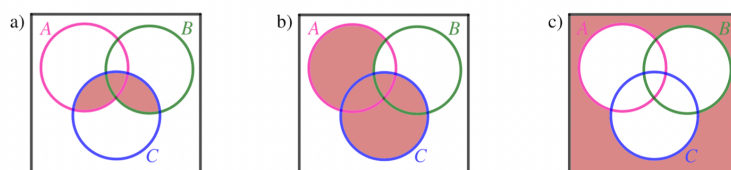
- (a)  $A \cap D$
- (b)  $A \cup D$
- (c)  $B \cap D$
- (d)  $C \setminus D$
- (e)  $B'_C$
- (f)  $A \setminus C$

### Vennovy diagramy

1. Znázorněte pomocí Vennova diagramu:

- (a)  $(A \cap B) \setminus C$
- (b)  $(A \setminus C) \cup B$
- (c)  $A' \setminus C$

2. Zapište symbolicky (pomocí operací s množinami A, B, C) vztahy znázorněné Vennovými diagramy na obrázku 1:



Obrázek 1: Vennovy diagramy

3. Zjednodušte zápis

$$[(A \cup B) \setminus (B \cap C)] \setminus (A \cap C).$$

### Textová úloha

- a) Autocentrum prodává automobily několika značek. Za poslední měsíc bylo prodáno celkem 61 vozů. Automobilů vybavených adaptivním tempomatem bylo prodáno třikrát více než automobilů značky Škoda. Automobilů Škoda bez adaptivního tempomatu bylo prodáno o 6 méně než škodovek s tempomatem. Aut bez adaptivního tempomatu jiné značky než Škoda bylo prodáno o 3 více než automobilů Škoda bez tempomatu. Kolik aut prodalo autocentrum značky Škoda? A kolik prodalo vozů s adaptivním tempomatem jiné značky než Škoda?

#### K čemu mi to bude?

Nechť  $A$  je množina uživatelů, kteří klikli na reklamu, a  $B$  množina těch, kteří provedli nákup. Pak  $A \cap B$  vyjadřuje *konverze* a  $A \setminus B$  *ztracený potenciál*. Tedy běžná analýza dat je přímo aplikací množinové logiky.

## 3 Řešení

*Množina (konečná/nekonečná), prvek množiny, mohutnost množiny, zápis množiny, rovnost množin*

1. Zapište dané množiny výčtem prvků a určete mohutnost

- (a)  $A = \{5\}, |A| = 1.$
- (b)  $B = \{-5; 5\}, |B| = 2.$
- (c)  $C = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}, |C| = 8.$

- (d)  $D = \{12; 24\}, |D| = 2.$
- (e)  $E = \{1; 3\}, |E| = 2.$
- (f)  $F = \{8; 9\}, |F| = 2.$
- (g)  $G = \{1; 2; 3; 4; 5; \dots\} = \mathbb{N}$ , množina *není* konečná (je však spočetná).
- (h)  $H = \{7; 11; 12\}, |H| = 3.$

2. Pro jaké  $x \in \mathbb{Z}$  obsahuje interval  $A = \langle x; 3x - 2 \rangle$  právě 9 přirozených čísel?

Jelikož  $x \in \mathbb{Z}$ , budou krajními hodnotami intervalu celá čísla. Aby intervalu náleželo právě devět přirozených čísel, musí být rozdíl krajních hodnot roven 8, tj. řešíme rovnici  $3x - 2 - x = 8$ . Řešením je  $x = 5$ , tedy  $A = \langle 5; 13 \rangle$ . Připustíme-li, že v zápisu daného intervalu nemusí být vlevo menší číslo (což je však neobvyklé) a že interval obsahuje právě 9 *celých* čísel, uvažujeme absolutní hodnotu rozdílu rovnou 8. Potom by úloha měla ještě druhé řešení:  $\langle -3; -11 \rangle$ , resp. raději psáno jako  $\langle -11; -3 \rangle$ .

3. Zapište výčtem množinu

$$M = \{x \in \mathbb{N}; (x < 15) \wedge [(x \bmod 3 < 2) \Rightarrow 2|x]\}.$$

Podmínku  $x < 15$  splňují přirozená čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. Z nich je třeba vybrat ta, která splňují i podmínku  $(x \bmod 3 < 2) \Rightarrow 2|x$ . Výsledky výpočtu  $x \bmod 3$  mohou nabývat hodnot 0, 1, 2. Nabývají-li hodnotu 2, potom první část implikace není splněna, a tedy celá implikace je automaticky pravdivá. Taková  $x$  budou v množině  $M$ , jedná se o hodnoty 2, 5, 8, 11 a 14. Ze zbývajících hodnot je třeba vybrat takové, pro něž je pravdivý i výrok  $2|x$ , tj. hodnoty 4, 6, 10 a 12. Tedy  $M = \{2; 4; 5; 6; 8; 10; 11; 12; 14\}$ .

*Podmnožina, prázdná množina, potenční množina, operace s množinami*

1. Vypište všechny podmnožiny  $A = \{a; b; c\}$ .

Množina  $A$  je tříprvková, tedy má  $2^3 = 8$  podmnožin:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$

2. Jsou dány  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{b \in \mathbb{R}; b > 3\}$ ,  $C = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $D = (-5; 3)$ . Zapište výsledky.

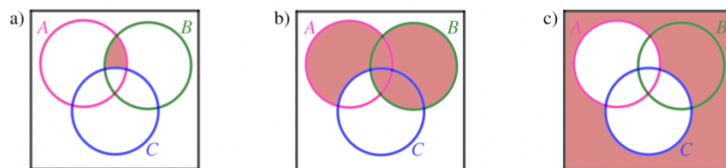
- (a)  $A \cap D = \{1; 2\}.$
- (b)  $A \cup D = (-5; 3) \cup \{4; 5\}.$
- (c)  $B \cap D = \emptyset.$
- (d)  $C \setminus D = (-\infty; -5) \cup \langle 3; \infty \rangle.$
- (e)  $B'_C = C \setminus B = (-\infty; 1) \cup (1; 3).$
- (f)  $A \setminus C = \{1\}.$

*Vennovy diagramy*

1. Znázorněte pomocí Vennova diagramu:

- (a)  $(A \cap B) \setminus C$
- (b)  $(A \setminus C) \cup B$
- (c)  $A' \setminus C$

*Řešení:*



Obrázek 2: Vennovy diagramy

2. Zapište symbolicky (pomocí operací s množinami  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) vztahy znázorněné Vennovými diagramy na obrázku 1:

(a)  $(A \cup B) \cap C$ .

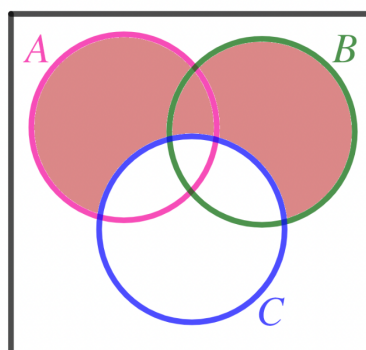
(b)  $(A \setminus B) \cup C$ .

(c)  $(A \cup B \cup C)'$ .

3. Zjednodušte  $[(A \cup B) \setminus (B \cap C)] \setminus (A \cap C)$ .

Lze řešit Vennovými diagramy.

$$[(A \cup B) \setminus (B \cap C)] \setminus (A \cap C) = (A \cup B) \setminus C.$$



Obrázek 3: Vennovy diagramy

### Textová úloha

- (a) Autocentrum prodává automobily několika značek. Za poslední měsíc bylo prodáno celkem 61 vozů. Automobilů vybavených adaptivním tempomatem bylo prodáno třikrát více než automobilů značky Škoda. Automobilů Škoda bez adaptivního tempomatu bylo prodáno o 6 méně než škodovek s tempomatem. Aut bez adaptivního tempomatu jiné značky než Škoda bylo prodáno o 3 více než automobilů Škoda bez tempomatu. Kolik aut prodalo autocentrum značky Škoda? A kolik prodalo vozů s adaptivním tempomatem jiné značky než Škoda?

*Řešení:* Úlohu lze řešit pomocí Vennova diagramu pro 2 množiny. Nechť množina  $A$  odpovídá všem prodaným vozům s adaptivním tempomatem a množina  $B$  všem prodaným vozům značky Škoda. Označíme-li  $a$  počet prodaných vozů jiné značky než Škoda s tempomatem,  $b$  počet prodaných vozů Škoda s tempomatem,  $c$  počet prodaných vozů Škoda bez tempomatu a  $d$  počet ostatních prodaných vozů, potom z textu zadání vyplývá, že platí:

$$a + b + c + d = 61$$

$$a + b = 3(b + c)$$

$$c + 6 = b$$

$$d - 3 = c$$

Vyřešením soustavy lineárních rovnic získáme  $a = 35$ ,  $b = 11$ ,  $c = 5$  a  $d = 8$ . Autosalón tedy prodal 16 škodovek ( $b + c$ ) a 35 vozů s tempomatem jiné značky než Škoda.

**Pro doplnění:**

Na následujícím odkazu je možné nalézt videa týkající se množin například pro připomenutí/osvěžení/doplnění pojmů (průnik, sjednocení, doplněk, rozdíl, aj.): Isibalo: Úvod do množin.