

Komplexní čísla

Odkud se vzala komplexní čísla?

Přibližně v 16. století se matematici jako Gerolamo Cardano, Rafael Bombelli, Niccolò Tartaglia nebo Scipione del Ferro zabývali řešením kubických rovnic. Narazili na problém s odmocninami ze záporných čísel. Záporná čísla jako taková tehdy činila velké potíže (snadno si představíme 3 ovečky, ale jak si představit -3 ovečky?). Jak k tomu navíc interpretovat například $\sqrt{-1}$? Aby bylo možné kubické rovnice vyřešit, bylo nutné pracovat i s odmocninami ze záporných čísel. Imaginární jednotka i se však neobjevila hned. Třeba Bombelli popsal $\sqrt{-1}$ jako *più di meno*, aby mohl rovnice úspěšně zvládnout. Dnes používaný symbol i zavedl až Leonhard Euler v 18. století, čímž formalizoval práci s komplexními čísly.

K čemu komplexní čísla slouží?

Komplexní čísla jsou významná nejen v matematice, ale také ve fyzice, především v elektrotechnice (při analýze střídavých proudů), optice a hydrodynamice (kde umožňují popisovat dvourozměrné jevy pomocí jediné veličiny).

- Kubické rovnice měly dynamický vývoj. Mezi matematiky došlo k různým střetům. Jak vypadaly matematické duely a co přesně se odehrálo mezi Cardanem a Tartagliou? To se lze dozvědět zde: [How Imaginary Numbers Were Invented](#).

1 Zadání

Gaussova rovina, algebraický tvar (reálná a imaginární část, imaginární jednotka), číslo komplexně sdružené, absolutní hodnota, exponenciální a goniometrický tvar (argument komplexního čísla), Moivreova věta.

Algebraický tvar: $z = a + ib$

Goniometrický tvar: $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Exponenciální tvar: $z = |z|e^{i\varphi}$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \bar{z} = a - ib, \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{|z|}$$

1. Určete goniometrický tvar komplexního čísla.

(a) $e^{\frac{i\pi}{8}}$

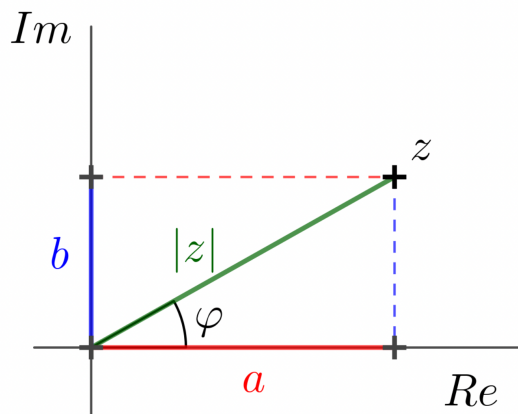
(b) $\frac{1}{2}e^{i\frac{17}{6}\pi}$

(c) $2\sqrt{3} + 2i$

2. Zapište v exponenciálním tvaru.

(a) -5

(b) $1 - i$



Obrázek 1: Znázornění v komplexní (Gaussově) rovině.

3. Určete algebraický tvar komplexního čísla.

(a) $e^{i\pi}$

(b) $18e^{i\frac{8}{3}\pi}$

4. Mějme $z = 2 - 3i$.

Spočítejte následující výraz (výsledek uveďte v algebraickém tvaru $a + bi$):

$$(1 - i) \cdot z + (3 + i) \cdot \bar{z} - (4 + 2i).$$

5. Dokažte Moivreovu větu:

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ a } \forall n \in \mathbb{N} : (\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

6. Vypočítejte v algebraickém tvaru:

$$(1 - i\sqrt{3})^5.$$

7. Vypočítejte v goniometrickém tvaru:

$$\left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5}\right)^{-60}.$$

Poznámka. V množině $\mathbb{C}$ představuje n -tou odmocninu z daného komplexního čísla

$$a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

množina n komplexních čísel

$$z_k = |a|^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \right), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Obrazy všech těchto čísel z_k leží ve vrcholech pravidelného n -úhelníku vepsaného do kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a s poloměrem $r = |a|^{\frac{1}{n}}$.

8. Řešte binomickou rovnici

$$8x^3 + 27 = 0.$$

9. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$:

a) $x^2 - 4x + 5 = 0$,

b) $ix^2 + 2x - 5i = 0$.

10. V Gaussově rovině najděte obrazy všech komplexních čísel z , pro něž platí:

(a) $|z + 3 + 2i| \leq 3$,

(b) $|1 - i| > |z| \geq 1$.

Proč se goniometrické funkce objevují v Eulerově identitě?

Myšlenka vychází z Taylorova rozvoje, ačkoliv historicky byl vývoj trochu složitější (čas ve videu 11:10): Why do trig functions appear in Euler's formula?.

2 Řešení

1. Určete goniometrický tvar k. č.

(a) Argument komplexního čísla je $\varphi = \frac{\pi}{8}$, absolutní hodnota $|z| = 1$,

$$\Rightarrow z = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right).$$

(b) Argument komplexního čísla z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ je

$$\varphi = \frac{17}{6}\pi - 2\pi = \frac{5}{6}\pi, \quad |z| = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right).$$

(c) Absolutní hodnotu dopočítáme z reálné a imaginární části:

$$a = 2\sqrt{3}, \quad b = 2, \quad |z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4.$$

Argument určíme z pravoúhlého trojúhelníku o přeponě $|z|$ a odvěsnách a, b :

$$\cos \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Tedy

$$z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

2. Zapište v exponenciálním tvaru.

(a) $|z| = 5, \varphi = \pi \Rightarrow z = 5e^{i\pi}$.

(b) $|z| = \sqrt{2}, \varphi = \frac{7}{4}\pi \Rightarrow z = \sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}$.

3. Určete algebraický tvar.

(a) $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$.

$$(b) 18e^{i\frac{8}{3}\pi} = 18(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi) = 18\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -9 + i9\sqrt{3}.$$

$$4. -2 + 4i$$

5. Dokažte Moivreovu větu.

(a) Pro $n = 1$ dostáváme $\cos x + i \sin x = \cos x + i \sin x$.

(b) Dokazujeme $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, kde

$$V(n+1): (\cos x + i \sin x)^{n+1} = \cos((n+1)x) + i \sin((n+1)x).$$

Za pomoci součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus upravíme pravou stranu:

$$\cos(nx+x) + i \sin(nx+x) = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x + i(\sin nx \cos x + \cos nx \sin x).$$

Dále

$$\dots = \cos x(\cos nx + i \sin nx) + i \sin x(\cos nx + i \sin nx) = (\cos x + i \sin x)(\cos nx + i \sin nx),$$

tedy

$$= (\cos x + i \sin x)^n (\cos x + i \sin x) = (\cos x + i \sin x)^{n+1}.$$

Implikace je tedy pravdivá, platí tedy i původní dokazované tvrzení.

6. Vypočtěte v algebraickém tvar.

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right).$$

Moivreovou větou:

$$(1-i\sqrt{3})^5 = 2^5\left(\cos\left(5 \cdot \frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(5 \cdot \frac{5\pi}{3}\right)\right) = 32\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 32\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 + 16i\sqrt{3}.$$

7. Vypočtěte v goniometrickém tvaru. Využijeme Moivreovu větu a argument následně upravíme

$$\left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5}\right)^{-60} = \cos\left(-60 \cdot \frac{3\pi}{5}\right) + i \sin\left(-60 \cdot \frac{3\pi}{5}\right) = \cos(-36\pi) + i \sin(-36\pi) = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi).$$

8. Rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$x^3 = -\frac{27}{8},$$

hledáme tedy všechny třetí odmocniny z čísla $-\frac{27}{8}$, které lze goniometrickém tvaru zapsat jako

$$\frac{27}{8}(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

$$x_k = \sqrt[3]{\frac{27}{8} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

9. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$.

a) Spočítáme diskriminant $D = 16 - 20 = -4$. Hledaná řešení jsou ve tvaru:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

b) Spočítáme diskriminant $D = 4 - 4i(-5i) = -16$. Hledaná řešení jsou ve tvaru:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2i}.$$

Úpravou dostaneme

$$x_1 = \frac{-2 + 4i}{2i} = \frac{-1 + 2i}{i} = -(-i + 2) = 2 + i, \quad x_2 = \frac{-2 - 4i}{2i} = \frac{-1 - 2i}{i} = -(-i - 2) = -2 + i.$$

10. V Gaussově rovině najděte obrazy.

(a) Nerovnici upravíme do tvaru

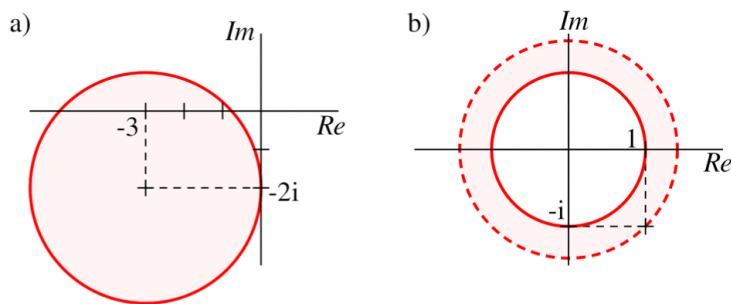
$$|z - (-3 - 2i)| \leq 3.$$

Hledáme všechna komplexní čísla, jejichž vzdálenost od bodu $-3 - 2i$ je menší nebo rovna třem. Obrazy těchto čísel v Gaussově rovině vyplní kruh se středem v bodě $-3 - 2i$ o poloměru 3.

(b) Hledáme všechna komplexní čísla, jejichž absolutní hodnota, nebo též velikost, je větší než 1 a menší než je velikost čísla $1 - i$. Obrazy těchto čísel vyplní oblast mezi soustřednými kružnicemi k resp. l se středem v počátku a poloměry

$$r_k = 1, \quad r_l = |1 - i| = \sqrt{2},$$

přičemž kružnice k do oblasti patří (nerovnost $\geq$), kružnice l nikoliv (nerovnost $<$).



Obrázek 2: Znázornění příkladu 10 v komplexní (Gaussově) rovině.