

1 Zadání

Pro řešení těchto příkladů je vřele doporučeno mít po ruce i pracovní list *Goniometrie tahák*, který lze nalézt na webových stránkách.

1. Určete

i) $\sin 135^\circ$, ii) $\cos \frac{7}{6}\pi$, iii) $\operatorname{tg} 300^\circ$, iv) $\operatorname{cotg} \frac{59}{4}\pi$, v) $\sin 4890^\circ$.

2. Načrtněte graf funkce určené předpisem.

a) $a(x) = \sin x - 2$	e) $e(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
b) $b(x) = \sin(x - 2) $	f) $f(x) = 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
c) $c(x) = -2 \sin x$	g) $g(x) = \cos 2 x $
d) $d(x) = \sin(-2x)$	h) $h(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

3. Načrtněte graf funkce určené předpisem.

a) $y = \operatorname{tg} x - 1$	d) $y = 2 - \operatorname{cotg} x$
b) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$	e) $y = \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
c) $y = \sqrt{1 + \operatorname{cotg}(x)}$	f) $y = \operatorname{tg} 2 x $

4. Vhodně omezte definiční obor jednotlivých goniometrických funkcí a sestrojte grafy funkcí k nim inverzních.

5. Z matematické analýzy je známo, že

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Dokázali bychom na základě předchozího příkladu obhájit (stačí slovně), proč platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1?$$

Zkuste při studiu analýzy popřemýšlet, zda existují i další „limitní“ dvojice.

6. Určete, pro která reálná čísla x je definován výraz $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$, a pak výraz zjednodušte.

7. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
b) $2 \sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 1$,
c) $2 \sin(3x + \pi) = -1$,
d) $\sin x + \cos x = 1$.

Pozn: V příkladu d) je dobré využít metodu univerzální substituce.

2 Řešení

1. Určete

i) $\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (II. kvadrant: $\sin \alpha > 0$).

- ii) $\cos \frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (III. kvadrant: $\cos \alpha < 0$).
- iii) $\operatorname{tg} 300^\circ = \operatorname{tg}(360^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$ (IV. kvadrant: $\operatorname{tg} \alpha < 0$).
- iv) $\operatorname{cotg}\left(\frac{59\pi}{4}\right) = \operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{4} + 14\pi\right) = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ (II. kvadrant: $\operatorname{cotg} \alpha < 0$).
- v) $\sin 4890^\circ = \sin(210^\circ + 13 \cdot 360^\circ) = \sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ (III. kvadrant: $\sin \alpha < 0$).

2. Načrtněte graf funkce určené předpisem.

3. Načrtněte graf funkce určené předpisem.

Různé typy funkcí, které lze upravit dle požadavků ze cvičení 2 a 3, nalezneme zde: Geogebra.

4. Řešení nalezneme v souboru *Goniometrie tahák* na str. 6 – 9.

5. Necht' je známo, že

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Položme $y = \arcsin x$. Pak $x = \sin y$ a z $x \rightarrow 0$ plyne $y \rightarrow 0$. Hledaný limitní podíl je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y}.$$

Protože platí

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1,$$

dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

6. Daný výraz je definován pouze pro ta reálná čísla, pro která je definována funkce $y = \operatorname{tg} x$ a zároveň i funkce $y = \operatorname{cotg} x$. Průnikem definičních oborů obou funkcí jsou všechna reálná čísla

$$x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Je-li tato podmínka splněna, platí

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x.$$

7. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice

a) Užitím substituce $u = 3x + \frac{\pi}{4}$ převedeme danou rovnici na řešení základní rovnice

$$\cos u = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Řešení této rovnice je:

$$u = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi = \frac{(12k+5)\pi}{6} \quad \text{nebo} \quad u = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi = \frac{(12k+7)\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Po zpětné substituci za u dostáváme

$$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{a} \quad 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,$$

odkud

$$x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{(24k+7)\pi}{36} \quad \text{a} \quad x = \frac{11\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{(24k+11)\pi}{36}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tj.

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{(24k+7)\pi}{36}, \frac{(24k+11)\pi}{36} \right\}.$$

b)

$$2 \sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 1$$

$$2 \sin^2 x + (1 - \sin^2 x) + \sin x \cos x = 1$$

$$\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x (\sin x + \cos x) = 0.$$

$$- \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$- \sin x = -\cos x \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi).$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi \right\}.$$

c) Rovnici budeme řešit substitucí $y = 3x + \pi$, tj. přejdeme k rovnici

$$2 \sin y = -1 \implies \sin y = -\frac{1}{2}.$$

Tuto rovnici jsme již řešili v příkladu a). Množinu všech jejích kořenů tvoří čísla tvaru

$$y_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad y_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Množina všech kořenů rovnice se tedy skládá ze všech čísel x_1, x_2 , pro která platí

$$3x_1 + \pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad 3x_2 + \pi = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi.$$

Odtud dostaneme

$$x_1 = \frac{7\pi}{18} + \frac{1}{3}(2k-1)\pi, \quad x_2 = \frac{11\pi}{18} + \frac{1}{3}(2k-1)\pi,$$

neboli po úpravě

$$x_1 = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi, \quad x_2 = \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi.$$

Množinu K všech kořenů rovnice lze tedy zapsat ve tvaru

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi, \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi \right\}.$$

d) Odkaz na odvození univerzální substituce nalezneme v zeleném rámečku v souboru *Goniometrie tahák*.

Položíme $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Potom

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Řešená goniometrická rovnice přejde na ekvivalentní tvar

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \iff \frac{2t+1-t^2}{1+t^2} = 1$$

$$\iff 2t - t^2 = 0 \iff t^2 - t = 0 \iff t(t-1) = 0 \iff t = 0 \vee t = 1.$$

Odtud plyne

$$\text{a) } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \iff \frac{x}{2} = k\pi \iff x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \iff \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \iff x = \frac{(4k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 2k\pi, \frac{(4k+1)\pi}{2} \right\}.$$

- Propojení jednotkové kružnice a grafů - vizualizace: Understanding Sine, Cosine and Tangent Graphs,
- Odvození tabulkových hodnot, vzorců a jejich vizualizace: All the TRIG you need for calculus actually explained.