

1 Stručná procházka historií aneb k čemu může sloužit důkaz indukcí?

Leonardo Pisánský (zvaný též Fibonacci) ve své učebnici aritmetiky *Liber Abaci* z roku 1202 sepsal známou úlohu o králíčcích (viz například Úloha o králíčcích), která vede na tzv. *Fibonacciho posloupnost*:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Jedná se o nekonečnou posloupnost přirozených čísel, v níž platí, že každé následující číslo je součtem dvou předchozích. Jestliže je objekt (např. posloupnost nebo funkce) definován pomocí jednoduššího případu sebe sama — přičemž je vždy uveden i základní (počáteční) případ — hovoříme o principu rekurze. Rekurze je užitečná nejen v matematice, ale také v lingvistice a informatice.

Jak rekurze souvisí s důkazem indukcí?

Představme si, že stavíme věž z kostek. Nejprve položíme první kostku, pak na ni druhou, třetí a tak dále — každé nové patro se opírá o to předchozí. Tento postup odpovídá rekurzi: každý krok využívá jednodušší verzi sebe sama, dokud nedojdeme k základnímu případu.

Chceme-li nyní dokázat, že taková věž bude stát pevně bez ohledu na počet pater, postupujeme podobně. Ověříme, že první patro stojí, a poté ukážeme, že pokud drží věž o n patrech, zvládneme postavit i věž o $n + 1$ patrech. To je důkaz indukcí.

Babylóňané očividně znali rekurzi, protože měli návod jak věž stavět. Bohužel nepoužili princip indukce, protože si neověřili, proč věž stojí a zda se jim nezřítí.

2 Zadání

1. Dokažte **sporem** větu: Pro všechna kladná reálná čísla a, b platí:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

2. Dokažte **matematickou indukci**, že součet prvních n kladných lichých čísel je roven n^2 .
3. Dokažte tvrzení:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

4. Dokažte tvrzení:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

5. Dokažte tvrzení:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

6. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je číslo $10^n - 4$ dělitelné šesti.

7. Najděte chybu v důkazu indukci:

Tvrzení: Všechna reálná čísla se navzájem rovnají.

Důkaz: Zapišeme tvrzení nejprve formálně jako výrok:

$V(n) =$ „Pro libovolná reálná čísla $x_1, \dots, x_n$ platí $x_1 = \dots = x_n$.“

Pro $n = 1$ výrok $V(1)$ triviálně platí. Pokud $n \in \mathbb{N}$, předpokládejme, že $V(n)$ platí a že $x_1, \dots, x_{n+1}$ jsou libovolná reálná čísla. Podle indukčního předpokladu se libovolná n -tice reálných čísel navzájem rovná, platí tedy

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n,$$

ale také

$$x_2 = \dots = x_n = x_{n+1}.$$

Pak ale $x_1 = \dots = x_{n+1}$, tedy výrok $V(n+1)$ platí. Všechna reálná čísla jsou si tedy rovna.

8. Mějme libovolnou konečnou množinu X a označme $|X| = n$. Zaveďme si následující značení:

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\},$$

tj. $\mathcal{P}(X)$ obsahuje všechny podmnožiny množiny X . Dokažte, že konečná množina X má vždy 2^n podmnožin, tzn. $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

9. Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$ platí:

$$\sum_{i=0}^n i \cdot i! = (n+1)! - 1.$$

10. Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n$.

Zformulujte obdobné tvrzení týkající se nerovnosti $2^n > n^2$ a dokažte jej.

3 Řešení

1. Budeme se snažit z negace původní věty odvodit nepravdivé tvrzení. Nejprve tedy větu znegujeme:

$$\exists a, b \in \mathbb{R}^+ : \frac{a}{b} + \frac{b}{a} < 2.$$

Neboť a i b jsou kladná reálná čísla, můžeme nerovnici vynásobit ab a následně upravit do tvaru $(a-b)^2 < 0$. Žádná kladná reálná čísla a, b však této nerovnici nevyhovují, dospěli jsme tedy ke sporu, negace výroku je nepravdivá, platí tedy původní tvrzení.

2. Chceme dokázat: $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.

a) Tvrzení nejprve dokážeme pro nejmenší číslo z množiny $\mathbb{N}$. Pro $n = 1$ tvrzení platí, dostáváme rovnost $1 = 1^2$.

- b) Dokážeme, že z platnosti zkoumaného tvrzení pro n (označme $V(n)$) vyplývá platnost daného tvrzení pro $n + 1$ ($V(n + 1)$).

$$V(n + 1) : \forall n \in \mathbb{N} : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Dle indukčního předpokladu lze výraz $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ nahradit výrazem n^2 a levou stranu $V(n + 1)$ upravit do tvaru $n^2 + (2n + 1)$, což po jednoduché úpravě dává $(n + 1)^2$. Z platnosti $V(n)$ plyne tedy platnost $V(n + 1)$, což spolu s platností $V(1)$ dává platnost tvrzení $V(n)$ pro všechna přirozená čísla.

3. a) Pro $n = 1$ dostáváme $1^2 = \frac{1}{6}(1 + 1)(2 + 1)$, tedy $1 = 1$.
b) Chceme dokázat $V(n) \Rightarrow V(n + 1)$, přičemž

$$V(n + 1) : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n + 1)^2 = \frac{1}{6}(n + 1)(n + 2)(2n + 3)$$

Využijeme indukční předpoklad a upravíme **levou stranu**:

$$\begin{aligned} \underline{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} + (n + 1)^2 &= \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) + (n + 1)^2 = \\ &= \frac{1}{6}(n + 1)[n(2n + 1) + 6(n + 1)] = \frac{1}{6}(n + 1)(n + 2)(2n + 3). \end{aligned}$$

Implikace je pravdivá, platí tedy i původní dokazované tvrzení.

4. a) Pro $n = 1$ dostáváme $1 \cdot 2 = \frac{1}{3}(1 + 1)(1 + 2)$, což platí.
b) Chceme dokázat $V(n) \Rightarrow V(n + 1)$, přičemž

$$V(n + 1) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1) + (n + 1)(n + 2) = \frac{1}{3}(n + 1)(n + 2)(n + 3)$$

Využijeme indukční předpoklad a upravíme **levou stranu**:

$$\underline{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1)} + (n + 1)(n + 2) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2) + (n + 1)(n + 2) = \dots$$

Vytkneme $(n + 1)(n + 2)$:

$$\dots = (n + 1)(n + 2) \left[\frac{1}{3}n + 1 \right] = \frac{1}{3}(n + 1)(n + 2)(n + 3).$$

Implikace je pravdivá, platí tedy i původní dokazované tvrzení.

5. a) Pro $n = 1$ dostáváme $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 + 1}$, což platí.
b) Chceme dokázat $V(n) \Rightarrow V(n + 1)$, přičemž

$$V(n + 1) : \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} + \frac{1}{(2n + 1)(2n + 3)} = \frac{n + 1}{2n + 3}$$

Postupujeme jako v předchozích příkladech.

$$\underline{\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)}} + \frac{1}{(2n + 1)(2n + 3)} = \frac{n}{2n + 1} + \frac{1}{(2n + 1)(2n + 3)}$$

$$= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Implikace je pravdivá, platí tedy i původní dokazované tvrzení.

6. a) Pro $n = 1$ dostáváme $10^1 - 4 = 6$, což je číslo dělitelné 6.
 b) Chceme dokázat $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, přičemž $V(n+1)$: Číslo $(10^{n+1} - 4)$ je dělitelné 6.
 Toho dosáhneme upravením výrazu $10^{n+1} - 4$ za současného využití indukčního předpokladu v podobě dosazení výrazu $6k$ (kde $k \in \mathbb{N}$) za $10^n - 4$:

$$10^{n+1} - 4 = 10 \cdot (10^n - 4 + 4) - 4 = 10 \cdot (6k + 4) - 4 = 6 \cdot 10k + 40 - 4 = 6(10k + 6).$$

Implikace je pravdivá, platí tedy i původní dokazované tvrzení.

Návrhy kolegů

Při cvičení zaznělo více řešení této úlohy (například namísto zkoumání dělitelnosti číslem šest lze postup rozdělit na dvě části – dělitelnost číslem dvě a dělitelnost číslem tři), podívejme se na jedno navrhované řešení podrobněji.

- a) Pro $n = 1$ dostáváme $10^1 - 4 = 6$, což je číslo dělitelné 6.
 b) Chceme dokázat $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, přičemž indukční předpoklad zapíšeme v následující formě

$$10^n - 4 = 6m, \quad m \in \mathbb{N},$$

upravíme

$$10^n = 6m + 4.$$

Dosadíme do indukčního kroku $V(n+1)$:

$$10^{n+1} - 4 = 10 \cdot 10^n - 4 = 10 \cdot (6m + 4) - 4 = 60m + 40 - 4 = 60m + 36 = 6(10m + 6).$$

7. V indukčním kroku předpoklad $V(n)$ říká, že „v každé skupině n čísel platí rovnost“.

Implikace $V(n) \Rightarrow V(n+1)$ platí $\forall n \geq 2$, ale neplatí pro $n = 1$, což stačí k tomu, aby neplatil celý důkaz. Z tvrzení „ $x_1 = x_1$ “ neplyne $x_1 = x_2$. Tedy indukční krok nefunguje pro přechod z $1 \rightarrow 2$.

A protože v indukci musí fungovat právě tento první přechod, tak celý důkaz padá. Pro vyšší n by sice překryv existoval (např. $x_2, \dots, x_n$), ale indukce se nikdy „nerozjede“, protože nemá platný start.

Selhání indukce

Obdobný princip, který ilustruje důležitost prvního kroku v důkazu indukcí, prezentuje i úloha s koňmi (viz str. 6) Matematická indukce I.

8. Mějme libovolnou množinu X , která obsahuje n prvků, $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Budeme předpokládat, že $|P(X)| = 2^n$.

- a) Pro $n = 0$: $X = \emptyset$, $|P(X)| = 2^0 = 1$, což platí.
 b) $V(n) \Rightarrow V(n+1)$: V indukčním kroku uvažujeme novou množinu M , pro kterou platí, že $|M| = n+1$.

Přejeme si, aby $|P(M)| = 2^{n+1}$.

Abychom si splnili přání, potřebujeme pracovat s množinou X , neboť jen o této množině něco víme z indukčního předpokladu.

Jak bychom množinu M mohli zapsat pomocí množiny X ?

Jelikož M má $n+1$ prvků a X má n prvků, mohli bychom množinu M zapsat jako: $M = X \cup \{a_{n+1}\}$, kde $\{a_{n+1}\}$ je libovolná jednoprvková množina.

Obdržíme $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\}$.

Z indukčního předpokladu víme, že $|P(X)| = 2^n$, tedy z množiny $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ vznikne 2^n podmnožin. Nyní se ptáme:

Kolik nových podmnožin vznikne, jestliže k množině X přidáme jednoprvkovou množinu $\{a_{n+1}\}$?

Představme si nyní, že si rozepíšeme 2^n podmnožin množiny X jednu po druhé. Měli bychom: prázdnou podmnožinu, jednoprvkové podmnožiny, dvouprvkové podmnožiny, atd. Ke každé z těchto podmnožin přidáme $\{a_{n+1}\}$ a tím nám vždy vznikne nová množina, tj.

- $\emptyset \cup \{a_{n+1}\} = \{a_{n+1}\}$,
- $\{a_1\} \cup \{a_{n+1}\} = \{a_1, a_{n+1}\}$
- $\{a_2\} \cup \{a_{n+1}\} = \{a_2, a_{n+1}\}$
- $\vdots$
- atd.

Přidáním jednoprvkové množiny $\{a_{n+1}\}$ k 2^n podmnožinám vznikne dvojnásobek původního počtu podmnožin, tedy $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, čímž máme hotovo.

Inspirativní diskuze

Na základě diskuze, která proběhla na cvičení, níže nalezneme formálnější způsob řešení. Převzato z práce *Stručný úvod do teorie množin pro středoškoláky*, str. 92.

Postupujme indukcí podle mohutnosti n množiny X . Pro $n = 0$ obsahuje **potenční** množina množiny X pouze prázdnou množinu, tj. $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 2^0 = 1$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro množinu o n_0 prvcích. Pro důkaz indukčního kroku mějme množinu X o $n_0 + 1$ prvcích. Vezměme libovolný prvek $x \in X$. Prvky potenční množiny $\mathcal{P}(X)$ si rozdělíme do množin T a T' takto:

- $T = \{Q \in \mathcal{P}(X) \mid x \in Q\}$ a
- $T' = \{Q \in \mathcal{P}(X) \mid x \notin Q\}$.

Tedy v T se nachází všechny podmnožiny množiny X obsahující prvek x a v T' všechny podmnožiny, které jej neobsahují. Z definice lze vidět, že T a T' jsou disjunktní, tj. $T \cap T' = \emptyset$, a také $X = T \cup T'$. Jaké jsou mohutnosti T a T' ? Množina T' obsahuje všechny podmnožiny množiny $X \setminus \{x\}$ a tedy podle indukčního předpokladu má 2^{n_0} podmnožin, tj. $|\mathcal{P}(X \setminus \{x\})| = 2^{n_0}$.

Jak vypadají množiny obsažené v T ? Uvažme libovolnou podmnožinu A' množiny X , která neobsahuje prvek x . Taková množina musí být (z definice) prvkem množiny T' . Pokud nyní položíme množinu $A = A' \cup \{x\}$, získáme tak množinu obsahující prvek x , a tudíž $A \in T$. Naopak pokud bychom měli množinu B obsahující prvek x , tj. $B \in T$, pak definováním $B' = B \setminus \{x\}$ získáme množinu z T' . To však znamená, že každé množině $A' \in T'$ odpovídá právě jedna množina $A \in T$.

Z toho plyne, že počet množin v T je stejný^a jako v T' , tj. $|T| = |T'|$, což podle již aplikovaného indukčního předpokladu znamená, že $|T| = 2^{n_0}$. Protože však množiny T a T' jsou disjunktní, celkový počet prvků je $2^{n_0} + 2^{n_0} = 2^{n_0+1}$, což jsme chtěli dokázat.

^aFormálně vzato jsme sestrojili bijekci mezi množinami T a T' , kde obrazem množiny $A \in T$ je $A \setminus \{x\} \in T'$.

Návrhy kolegů

- Pozorným čtenářům neunikne, že v druhé verzi důkazu se objevuje bijekce. Během cvičení někteří kolegové navrhovali, že podmnožinu buď vybereme, nebo nikoli (zaznělo rovněž, že přiřadíme číslo 1, či přiřadíme číslo 0). Co si pod pojmem "výběru" a "přiřazení" ovšem formálně představit? Skrývá se za ním právě nějaké *zobrazení*. Dané problematice se budeme věnovat později, což je i důvod, proč v první (méně rigorózní) verzi důkazu je bijekce zamlčena. Na následujícím odkazu: [Power set](#) lze dané myšlenky více prozkoumat v sekci *Properties*.
- Milý čtenáři, zkus zavřít oči a náhodně vybrat číslo. Možná Tě napadlo číslo 37 nebo 42. Ať Tě napadlo cokoli, jsou tato čísla opravdu náhodná? Selhává-li na náhodu člověk, generují počítače náhodná čísla? Pokud jako lidé neumíme náhodně vybrat, jak v matematice můžeme cokoli "vybrat"? V souvislosti s úvahami, které na prosemináři zazněly, doporučuji si ohledně problematiky výběru poslechnout příběh muže, který téměř rozbil matematiku ... a i sebe: [Veritasium: Axiom of Choice](#).

9. a) Pro $n = 0$ dostáváme na levé straně $\sum_{i=0}^0 i \cdot i! = 0!0 = 0$, na pravé straně rovnosti bude $(0 + 1)! - 1 = 1 - 1 = 0$, tedy levá strana je rovna pravé.
- b) Chceme dokázat $V(n) \Rightarrow V(n + 1)$, přičemž

$$V(n + 1) : \forall n \in \mathbb{Z}_0^+ : \sum_{i=0}^{n+1} i \cdot i! = (n + 2)! - 1$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i \cdot i! = \sum_{i=0}^n i \cdot i! + (n + 1)(n + 1)! = \underline{(n + 1)! - 1} + (n + 1)(n + 1)! = (n + 2)! - 1.$$

Implikace je tedy pravdivá, platí tedy i původní dokazované tvrzení.

10. a) Pro $n = 1$ dostáváme pravdivé tvrzení $2 > 1$.
- b) Dokazujeme $V(n) \Rightarrow V(n + 1)$, kde $V(n + 1) : \forall n \in \mathbb{N} : 2^{n+1} > n + 1$. Postupně upravujeme levou stranu nerovnice a ve vhodné chvíli využijeme indukční předpoklad:

$$2^{n+1} = 2 \cdot \underline{2^n} > 2 \cdot \underline{n} \geq n + 1,$$

kde poslední úprava platí $\forall n \in \mathbb{N}$. Platí tedy $2^{n+1} > n + 1$, implikace je pravdivá, platí i původní dokazované tvrzení.

Zformulujeme a dokažme obdobné tvrzení: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : 2^n > n^2$.

- a) Zkusíme ověřit tvrzení pro nejmenší přirozené číslo $n = 1$, dostáváme pravdivé tvrzení $2 > 1$. Ale pozor, kdybychom šli dál, pro $n = 2$ dostaneme $4 > 4$, pro $n = 3$ dostaneme $8 > 9$, atd. Tento problém bychom mohli přehlédnout, ale v některém kroku dokazování implikace by se k nám měl vrátit.

- b) Dokazujeme $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, kde $V(n+1) : 2^{n+1} > (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Postupně upravujeme levou stranu nerovnice a ve vhodné chvíli využijeme indukční předpoklad:

$$2^{n+1} = 2 \cdot \underline{2^n} > 2 \cdot \underline{n^2} = n^2 + 2n + 1 + n^2 - 2n - 1 = (n+1)^2 + (n^2 - 2n - 1) \geq (n+1)^2,$$

kde výraz $(n^2 - 2n - 1)$ je větší nebo roven nule $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, a pro tato n jej lze tedy vynechat, aniž bychom pokazili nerovnost. Vraťme se zpět na začátek. Implikace je pravdivá pro $n \geq 3$, ale $V(3)$ neplatí. Pro $n = 4$ tvrzení stále neplatí, dostáváme $16 > 16$, ale pro $n = 5$ tvrzení již platí, dostáváme $32 > 25$. Tvrzení lze tedy zformulovat ve tvaru: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5 : 2^n > n^2$.