Stereometrie

Matematická pohádka: Hilbertovy problémy aneb proč si je nevyřešil sám
Na mezinárodním kongresu matematiků v Paříži v roce 1900 představil David Hilbert seznam 23 nejdůležitějších otevřených otázek tehdejší matematiky. Tyto tzv. Hilbertovy problémy zásadně ovlivnily směr matematického výzkumu ve 20. století a mnohé z nich (např. Riemannova hypotéza) zůstávají dodnes nevyřešeny.
Třetí problém se týkal geometrie a položil zdánlivě jednoduchou otázku: Lze libovolné dva mnohostěny o stejném objemu rozřezat na konečný počet shodných mnohostěnných částí a z nich sestavit ten druhý?
Už v roce 1901, tedy pouhý rok po zveřejnění, problém vyřešil Hilbertův žák Max Dehn. Dokázal, že odpověď zní ne. Dehn zavedl nový geometrický invariant (dnes známý jako Dehnovo číslo), pomocí kterého matematicky potvrdil, že například pravidelný čtyřstěn a krychle o stejném objemu nejsou „rozkladově rovné“. Tímto důkazem Dehn ukázal, že pro výpočet objemů těles se zakřivenými hranami nebo specifickými úhly je nezbytný infinitezimální počet (limity), a pouhé „přeskládání“ kousků nestačí. Výpočet objemu zdánlivě jednoduchého tělesa jako jehlanu se tedy neobejde bez metod nekonečně malých veličin.

Konstrukce řezů těles: teorie

1 Řezy

Základní pojmy

- **Řez tělesa rovinou** – definujeme jako průnik daného tělesa a roviny řezu.
- **Sestrojit řez** – znamená určit průsečnice roviny řezu s rovinami jednotlivých stěn tělesa.

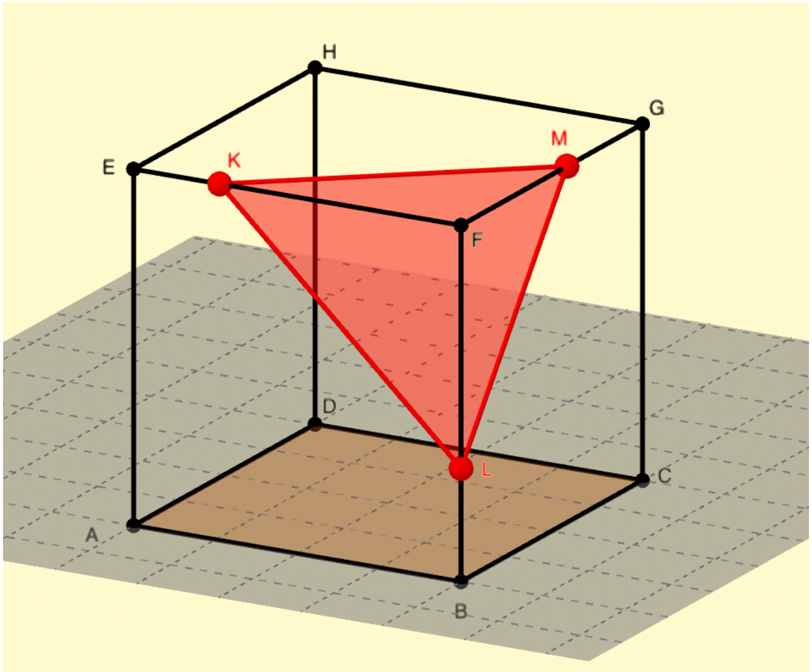
Věty a důsledky užívané při konstrukci

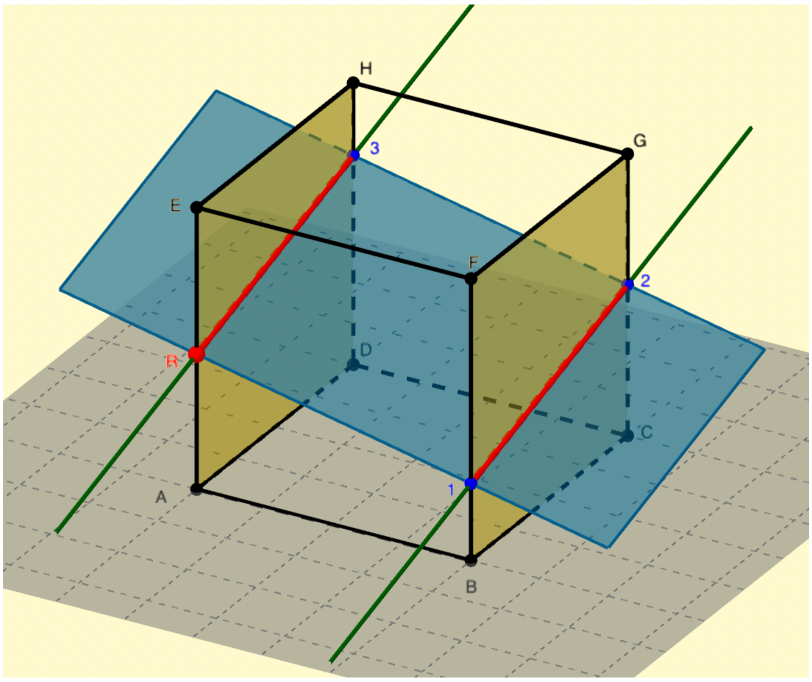
Pravidlo 1: Body v jedné stěně

Věta 1: Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená leží v této rovině.
Důsledek 1: *Leží-li dva různé body roviny řezu v některé stěně, potom leží v této stěně i jejich spojnice. Průnik spojnice a stěny je jednou stranou řezu.*

Pravidlo 2: Rovnoběžnost stěn

Věta 2: Dvě rovnoběžné roviny protíná rovina třetí ve dvou rovnoběžných přímkách.
Důsledek 2: *Jsou-li dvě stěny rovnoběžné a přitom různoběžné s rovinou řezu, jsou jejich průsečnice s rovinou řezu rovnoběžné.*

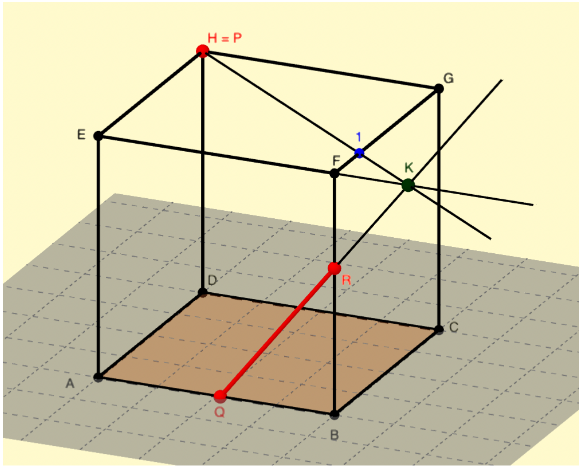




Pravidlo 3: Průsečnice tří rovin

Věta 3: Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny jediný společný bod, procházejí tímto bodem všechny tři průsečnice.

Důsledek 3: *Průsečnice rovin dvou sousedních stěn s rovinou řezu a společná hrana těchto stěn se protínají v jednom bodě.*



Pro názornou ilustraci příkladů doporučuji materiály zde: Řezy těles - sbírka sedmero triků, Martin Vinkler.

Praktické tipy pro konstruování

1. Vždy začneme hledáním dvou bodů, které leží v **téže stěně** (Důsledek 1).
2. U hranolů a kvádrů využívejme **rovnoběžnost protilehlých stěn** (Důsledek 2) k urychlení konstrukce.
3. Pokud body v jedné stěně nemáme, využijme **průsečíky na hranách** nebo vně tělesa pomocí prodloužení hran (Důsledek 3).

2 Odchylky

Odchylka přímek

Definice odchylky dvou přímek souvisí s jejich vzájemnou polohou:

- **rovnoběžky** – $0°$
- **různoběžky** – velikost každého z ostrých nebo pravých úhlů, který přímky spolu svírají
- **mimoběžky** – odchylka různoběžek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými přímkami

- Identifikujeme trojúhelník, ve kterém leží odchylka přímek.
- Určíme odchylku s využitím goniometrických funkcí, či sinové a kosinové věty.

Odchylka přímky a roviny

- Je-li přímka kolmá k rovině, potom je jejich odchylka rovna 90°.
- Není-li přímka kolmá k rovině, potom je jejich odchylka rovna odchylce dané přímky a jejího pravoúhlého průmětu do dané roviny.

Odchylka rovin

- Odchylka dvou rovin je rovna odchylce **jejich průsečnic** s rovinou, která je k oběma kolmá.
- (Rovina kolmá k dvěma různoběžným rovinám je kolmá k jejich průsečnici.)

3 Vzdálenosti

Vzdálenost bodu od bodu

- **Vzdálenost bodů** A, B
  - délka úsečky AB

Vzdálenost bodu od podprostoru (přímka, rovina)

- Definice: Je rovna nejmenší ze všech vzdáleností bodu A od bodu X, kde X je libovolný bod daného podprostoru.
- Postup: K určení vzdálenosti využíváme **kolmý průmět** A' bodu A do daného podprostoru.
- Budou se nám dále v analytické geometrii hodit znalosti:

1. Vzdálenost d bodu $M[m_1; m_2]$ od přímky $p : ax + by + c = 0$ se vypočítá podle vzorce:
$$d = |Mp| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
2. Vzdálenost bodu $M[m_1, m_2, m_3]$ od roviny $\rho : ax + by + cz + d = 0$ se vypočítá podle vzorce:
$$v = \frac{|a \cdot m_1 + b \cdot m_2 + c \cdot m_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Vzdálenost dvou přímek p, q

- **Vzdálenost** $|pq|$
  - rovnoběžných – je rovna vzdálenosti bodu A jedné přímky od druhé přímky.
  - mimoběžných – je rovna délce nejkratší příčky mimoběžek (kolmá příčka).

Vzdálenost přímky p a roviny ρ

- **Vzdálenost** $|p\rho|$ **(**$p \parallel \rho$**)**
  - vzdálenost libovolného bodu A přímky p od dané roviny ρ.

Vzdálenost dvou rovin

- **Vzdálenost rovnoběžných rovin** $|\rho\sigma|$
  - vzdálenost libovolného bodu A jedné roviny od druhé roviny.

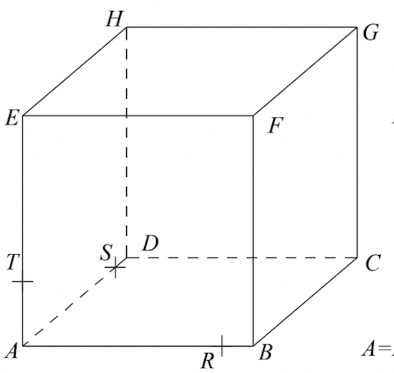
4 Zadání cvičení

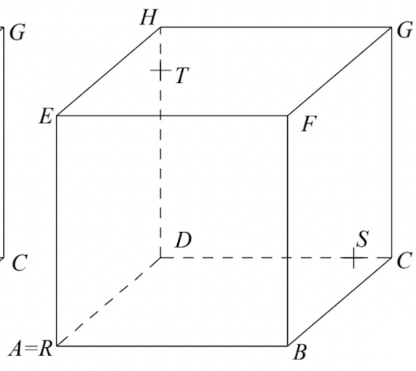
4.1 Řezy

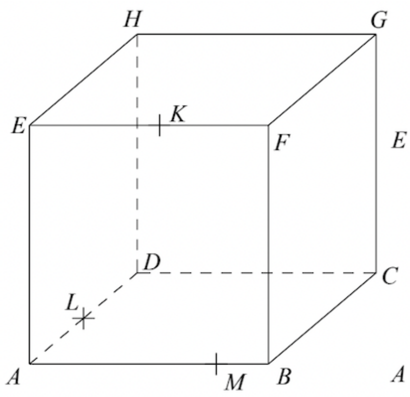
Zadání lze rovněž nalézt na webových stránkách jako samostatné pracovní listy dostupné pro tisk.

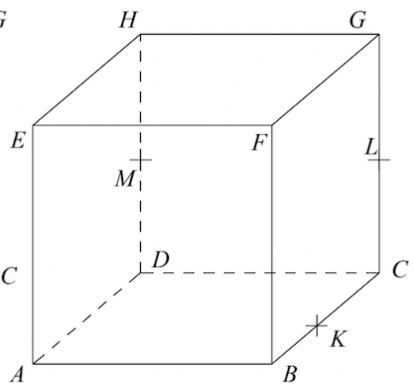
Řezy: úroveň I

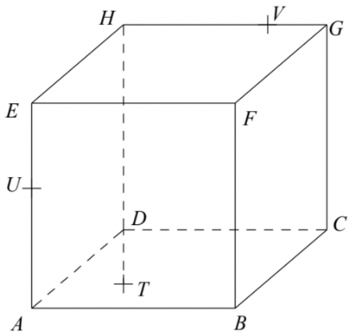
- Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou RST, rovinou KLM a rovinou TUV.

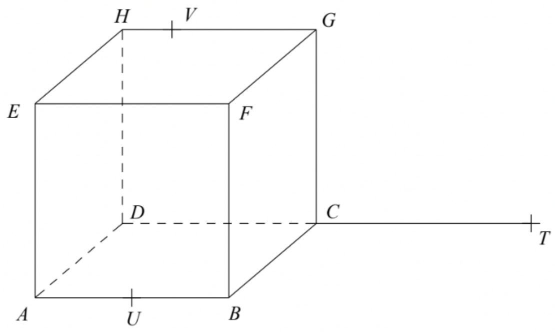






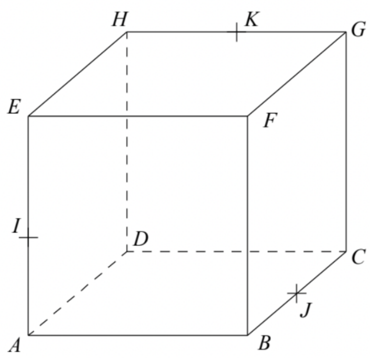


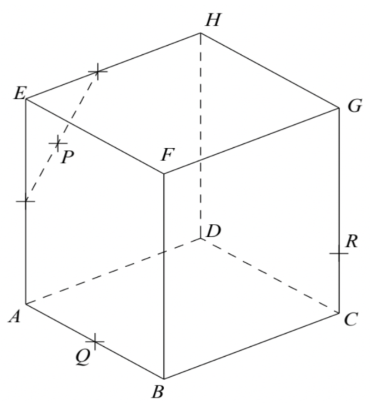


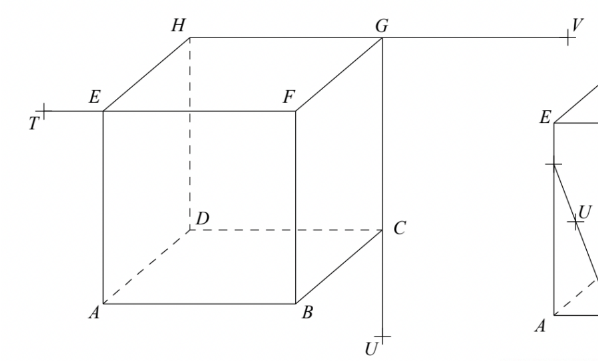


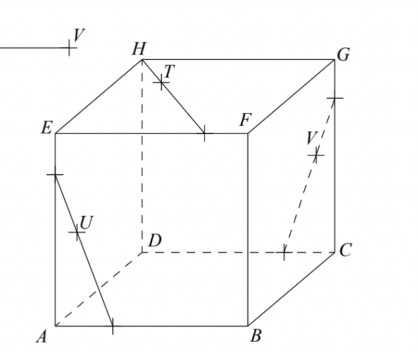
Řezy: úroveň II

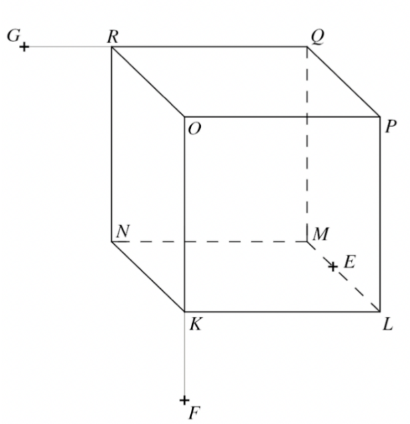
- Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou IJK, rovinou PQR, rovinou TUV a rovinou EFG.

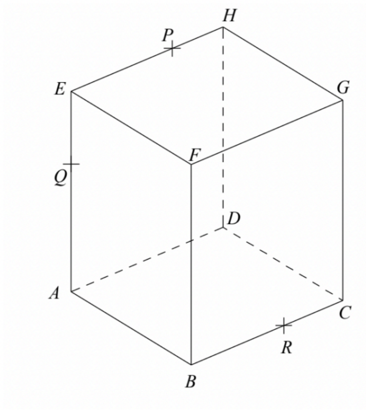






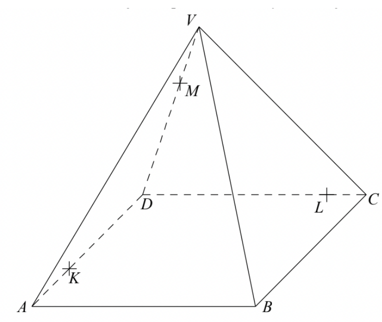


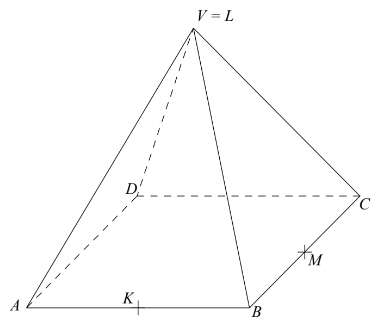


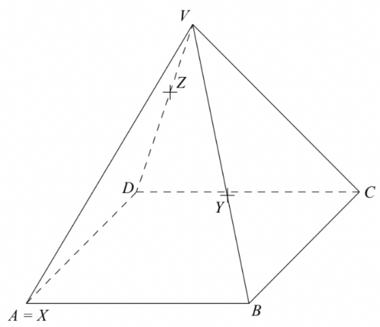


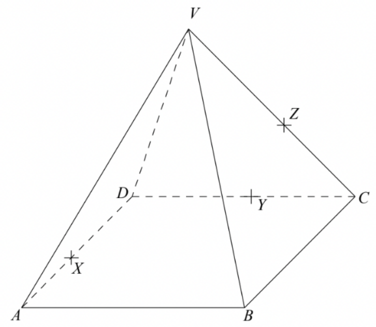
Řezy: úroveň III – jehlany

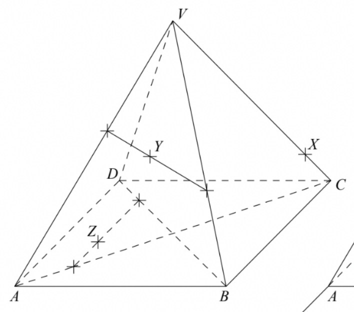
- Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou KLM, případně rovinou XYZ.

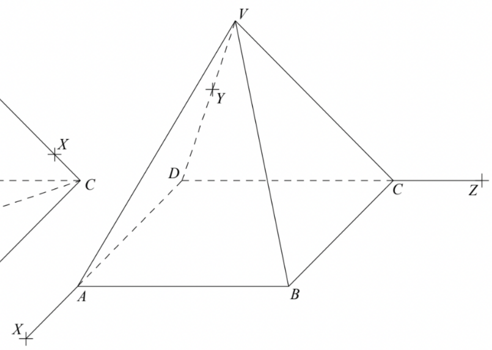






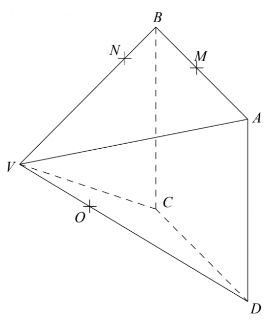


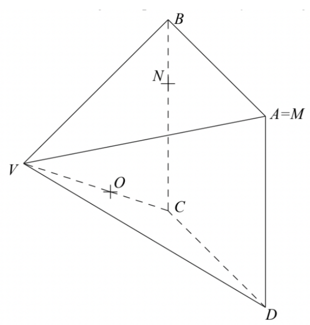




Řezy: úroveň IV – jehlany

1. Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou MNO.

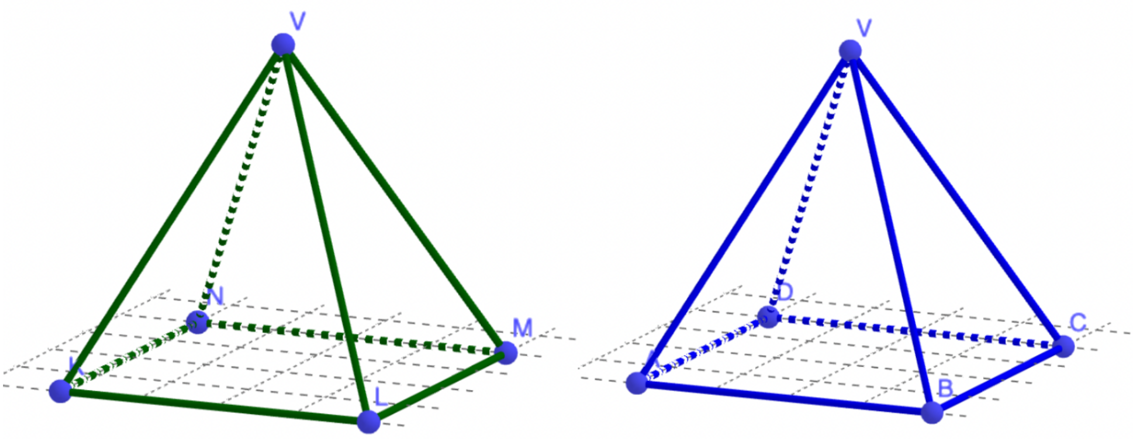




2. Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $KLMNV$ rovinou PES, přičemž:
   - $\mathbf{P}; P \in VK; |VP| : |PK| = 1 : 4$

- **E**; $E \in VM; |VE| = \sqrt{4}|ME|$
- **S**; $S \in KL; |KS| : |SL| = a : a; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou KLM, přičemž:
   - **K**; $K \in VA; |VK| : |AK| = 7 : 7$
   - **L**; $L \in VD; |VL| = |DL|$
   - **M**; $M \in VC; |CM| : |MV| = 1 : 4$.



4.2 Odchylky

1. V krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky a určete odchylku přímek DB a BH.

2. Bod S je středem podstavy pravidelného šestibokého jehlanu $ABCDEFV$, $|AB| = 2,5$ j, $|VS| = 3$ j. Bod M je střed hrany AV. Početně určete odchylku přímky AV od roviny podstavy.

3. V krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky a určete odchylku rovin ADH a roviny $AS_{EF}S_{GH}$

4.3 Vzdálenosti

1. V krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky a určete vzdálenost přímek EH a BC.

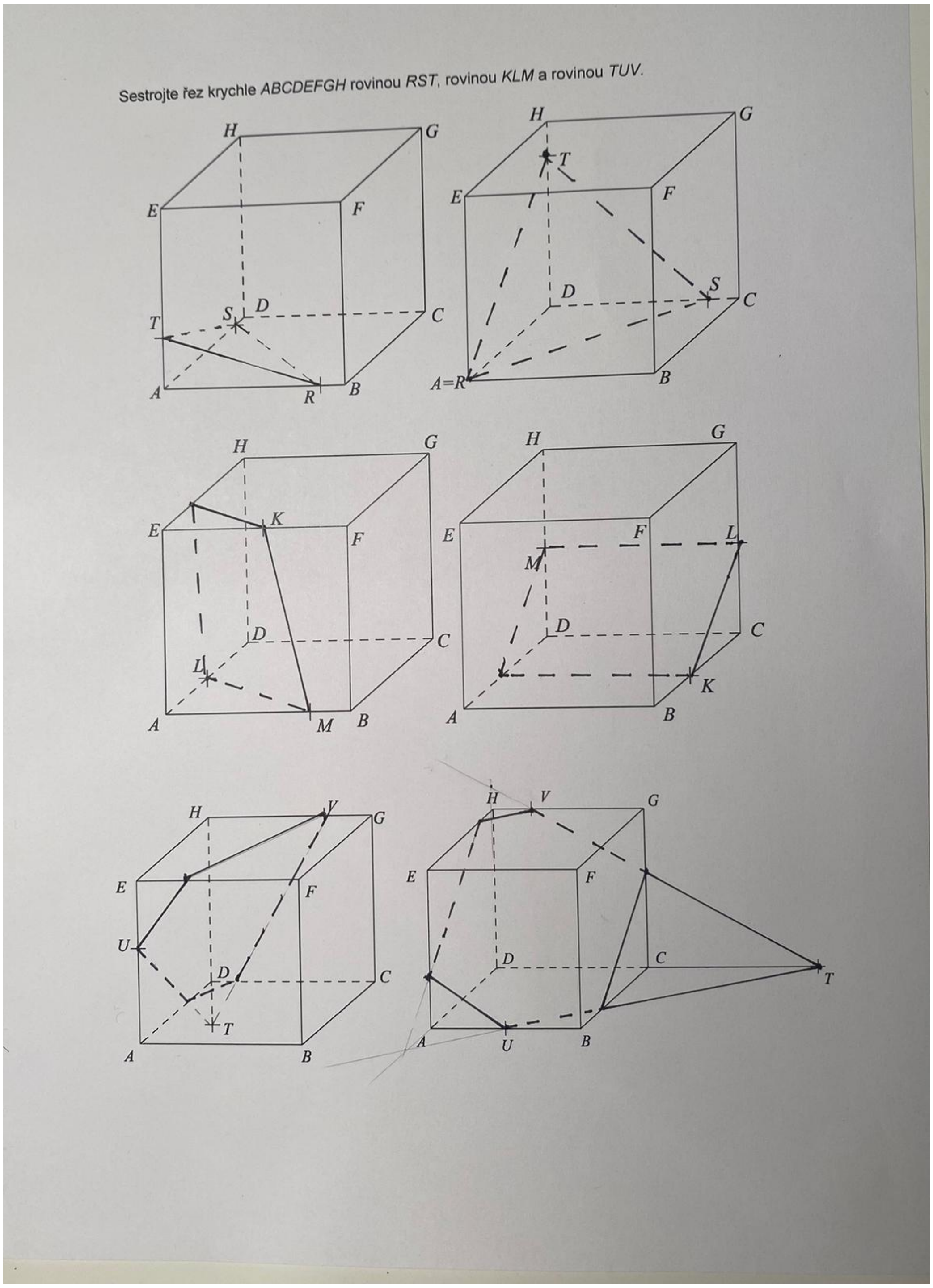
2. V krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky a určete vzdálenost bodu E od přímky BH.

3. (Bonus) V krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky a určete vzdálenost přímek EG a $S_{AB}S_{BC}$.

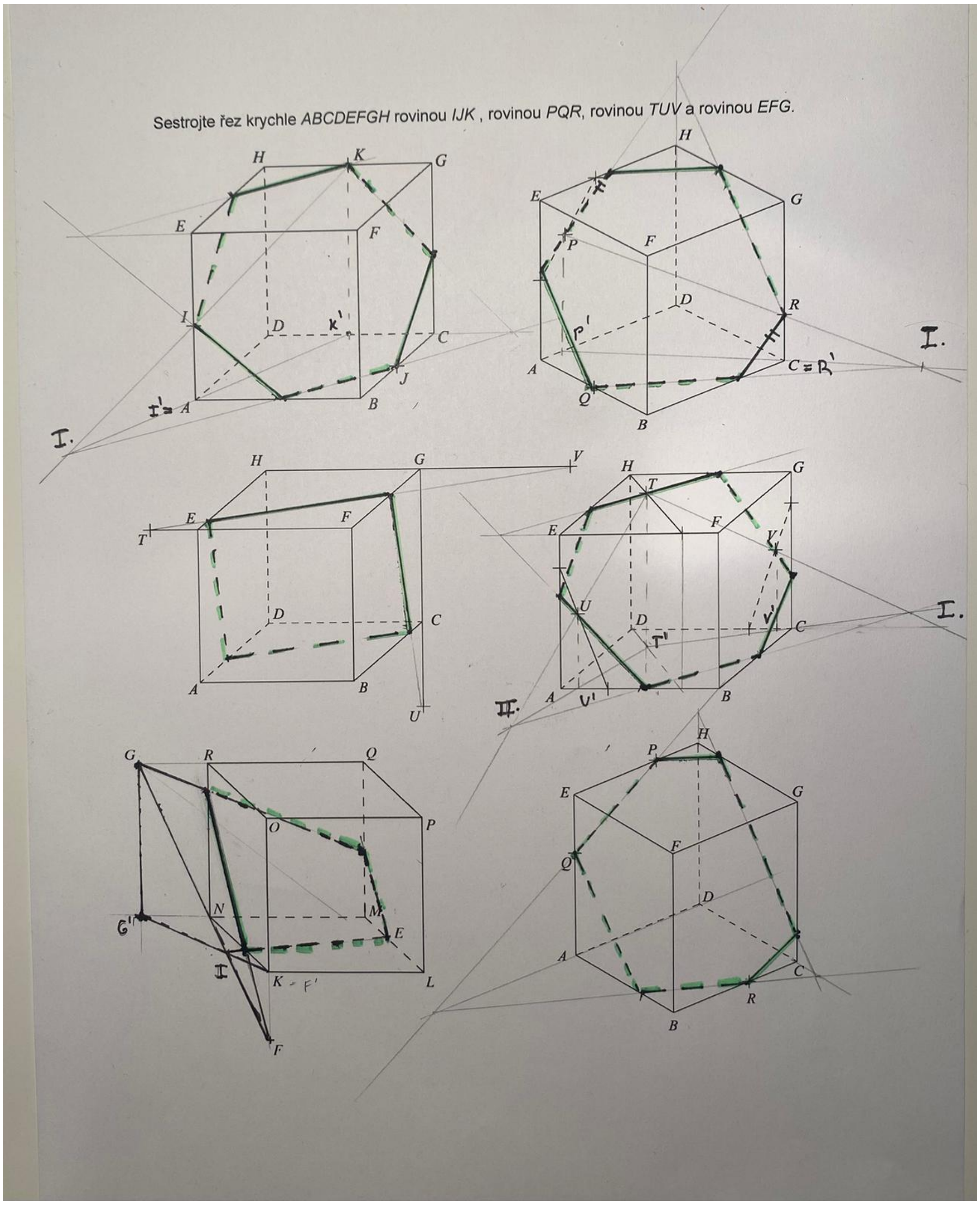
5 Řešení cvičení

5.1 Řezy

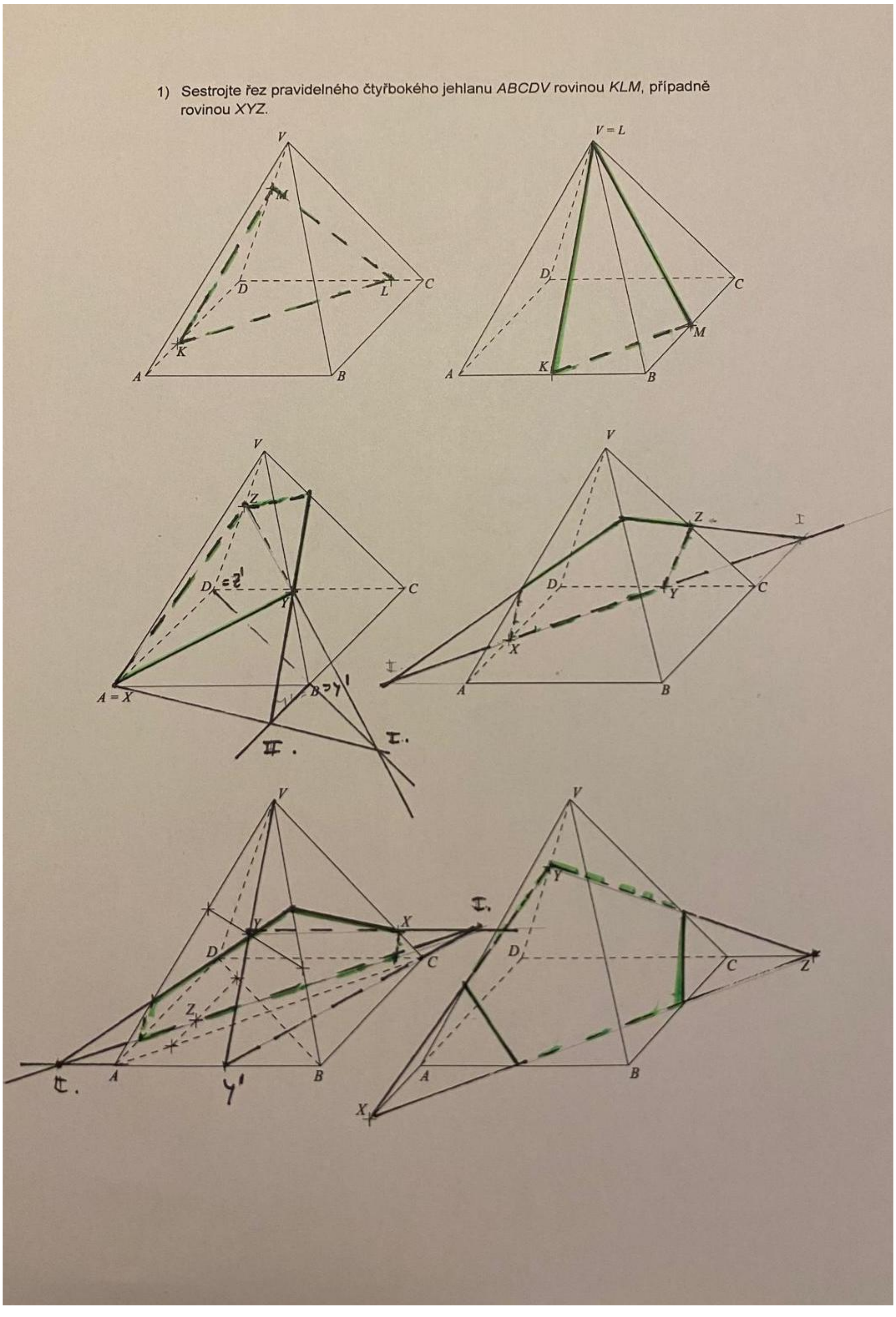
Řezy: úroveň I - náčrtek řešení



Řezy: úroveň II - náčrtek řešení



Řezy: úroveň III - náčrtek řešení


1) Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV rovinou KLM, případně rovinou XYZ.