Planimetrie

Co je bod? Co je přímka?

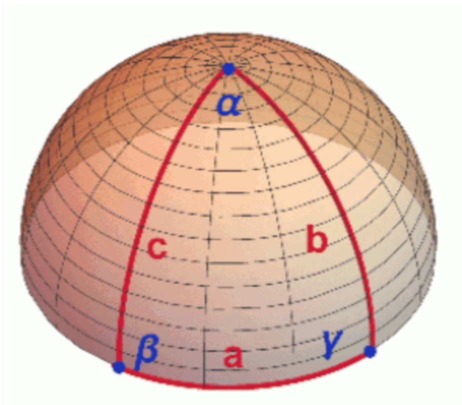
Výlet do historie:
Eukleidův odkaz a křehkost pátého postulátu
Na počátku stála Eukleidova snaha ucelit geometrické poznání v díle Základy. Eukleidés se pokusil definovat základní objekty, ovšem z dnešního pohledu byly jeho definice spíše intuitivní a filozofické:

- bod definoval jako „to, co nemá dílu“,
- přímku jako „délku bez šířky“.

Aby mohl budovat svou teorii, stanovil pět postulátů. Zatímco první čtyři byly považovány za zřejmé a jednoduché, pátý postulát (o rovnoběžkách) svou složitostí vyčníval. Po staletí se matematici domnívali, že nejde o axiom, ale o větu, kterou lze dokázat pomocí předchozích čtyř.

K hledání ekvivalentních formulací pátého postulátu významně přispěli matematici jako Girolamo Saccheri či Adrien-Marie Legendre. Jedna z těchto alternativních formulací zní následovně: *V eukleidovské rovině platí, že součet vnitřních úhlů každého trojúhelníka je roven přesně* $180°$. Toto tvrzení je logicky ekvivalentní s pátým Eukleidovým postulátem, tedy popření jednoho nutně vede k vyvrácení druhého. Zásadním předpokladem je zde však právě eukleidovský prostor. Co se ovšem stane, opustíme-li hranice roviny a přeneseme-li své úvahy například na povrch koule (úvaha je rovněž i součást otázky 2 v následujícím zadání)?

Vezměme si jako příklad sférickou geometrii. Zde roli přímek přebírají hlavní kružnice (např. poledníky a rovník). Snadno si lze představit trojúhelník tvořený dvěma poledníky a úsekem rovníku (viz obrázek níže). Protože poledníky protínají rovník pod úhlem $90°$, součet vnitřních úhlů takového trojúhelníku přesáhne $180°$ o velikost úhlu, který poledníky svírají u pólu. Tento jednoduchý příklad demonstruje, že bez pátého postulátu se hroutí i celá eukleidovská nauka o trojúhelnících.



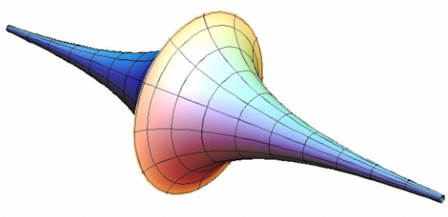
Hyperbolická geometrie: Svět negativního zakřivení
Zatímco sférická geometrie je modelem prostoru s kladnou křivostí, hyperbolická geometrie představuje její protiklad, tj. prostor s konstantní zápornou křivostí (viz model pseudosféry níže). Jejími nezávislými průkopníky byli ve 20. a 30. letech 19. století Nikolaj Ivanovič Lobačevskij a János Bolyai.
V tomto systému je pátý postulát nahrazen opačným tvrzením: *bodem neležícím na přímce prochází nekonečně mnoho rovnoběžek.* Tento radikální odklon od Eukleida má fascinující důsledky pro vlastnosti trojúhelníků:

- Součet úhlů: V hyperbolické rovině je součet vnitřních úhlů v trojúhelníku vždy menší než 180°.
- Defekt: Rozdíl mezi 180° a skutečným součtem úhlů (tzv. úhlový defekt) je přímo úměrný ploše trojúhelníka. Čím je trojúhelník větší, tím méně stupňů jeho úhly dohromady mají.

Právě existence těchto dvou odlišných, a přesto vnitřně bezrozporných světů – sférického a hyperbolického – ukázala, že pátý postulát je na ostatních nezávislý. Nebylo možné jej dokázat, protože existují světy, kde prostě neplatí. Riemann dále přišel s myšlenkou, že prostor může mít různé druhy zakřivení. Tím sjednotil eukleidovskou, sférickou i hyperbolickou geometrii jako různé varianty jednoho obecného systému.

K čemu to vše vlastně vůbec je?
Albert Einstein ve své obecné teorii relativity nahradil Newtonův pohled na gravitaci jako na sílu konceptem **zakřiveného časoprostoru**.
V blízkosti hmotných těles se prostor „ohýbá“ podobně jako třeba povrch koule a tělesa se v něm pohybují po nejkratších možných drahách (geodetikách), které již nejsou eukleidovskými přímkami. Bez aparátu neeukleidovské geometrie by Einstein svou teorii nikdy nemohl zformulovat.
Na principech obecné i speciální relativity je postaven systém GPS. Satelity se pohybují v jiném gravitačním poli a jinou rychlostí než přijímače na Zemi, což způsobuje drobné odchylky v plynutí času. Pokud by vědci a inženýři nepočítali se zakřivením časoprostoru a relativistickými jevy, chyba v určení polohy by narůstala tempem několika kilometrů za den.

Příběh, který začal jako filozofická otázka nad Eukleidovými texty, dnes určuje, zda naše autíčko trefí do správné ulice.



Obrázek 1: Pseudosféra

1 Zadání

Trojúhelníky

1. Na základě následujícího textu označte části:
    - znění (formulace věty)
    - výklad (označení prvků)
    - určení (co je třeba sestrojit)
    - konstrukce (samotné sestrojení)
    - důkaz (logické odůvodnění správnosti)
    - závěr (shrnutí)

b) proveďte konstrukci,

c) zdůvodněte, proč je trojúhelník rovnostranný.

> I.
>
> Na dané přímce omezené postav trojúhelník rovnostranný.
>
> Danou přímkou omezenou buď AB. Má se tedy na přímce AB postaviti trojúhelník rovnostranný.
>
> Ze středu A poloměrem AB buď narýsován kruh BCD, a opět ze středu B poloměrem BA buď narýsován kruh ACE, a od bodu C, v němž kruhy se protínají, k bodům A, B buďte vedeny spojnice AC, CB. A ježto bod A je středem kruhu CDB, AC je stejné s AB; ježto dále bod B je středem kruhu CAE, jest BC stejné s BA. Bylo pak dokázáno, že i CA je stejné s AB; tedy jedna i druhá z CA, CB je stejná s AB. Veličiny však témuž rovné i navzájem rovny jsou; tedy též CA jest rovna CB; ty tři tedy, CA, AB, BC jsou si rovny. Je tedy trojúhelník ABC rovnostranný a postaven jest na dané přímce omezené AB; což právě bylo vykonati.
>
> *Eukleidovy Základy. Přel. Fr. Servít, Praha, 1907.*

2. Dokažte následující tvrzení: V každém trojúhelníku je součet velikostí vnitřních úhlů roven $180°$.
   Bonus: V každém?

3. Určete, kde (uvnitř trojúhelníku, na jeho obvodu, nebo vně) leží průsečíky:
    - těžnic T (těžiště),
    - os stran S_o (střed kružnice opsané),
    - os úhlů S_v (střed kružnice vepsané),
    - výšek O (ortocentrum).

4. V rovině je dáno n různých bodů, přičemž žádné tři z nich neleží na jedné přímce. Kolik různých přímek je těmito body určeno?

5. Dokažte, že v trojúhelníku ABC platí pro délky těžnic t_a, t_b, t_c nerovnosti
$$\frac{1}{2}(a+b+c) < t_a + t_b + t_c < a + b + c.$$

6. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Nad stranami AC a AB jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ACM a ANB.

   Dokažte, že
$$|BM| = |CN|.$$

7. Dokažte Pythagorovu větu jako přímý důsledek vět Eukleidových.

8. Dokažte Eukleidovy věty jako přímý důsledek věty Pythagorovy.

9. V pravoúhlém trojúhelníku ABC o odvěsnách $a = 4\,\mathrm{cm}$ a $b = 3\,\mathrm{cm}$ protíná osa úhlu při vrcholu C přeponu AB v bodě K. Vypočtěte délku úsečky AK.

10. Uvnitř ostrého úhlu různoběžek a, b je dán bod C, který neleží na žádné z nich. Zapište stručný popis konstrukce trojúhelníku ABC takového, že $A \in a$, $B \in b$ a obvod trojúhelníku ABC je minimální.

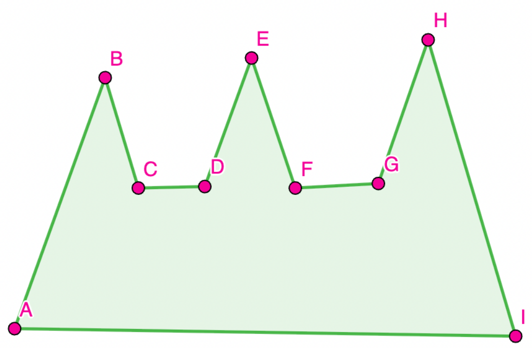
Kružnice, mnohoúhelníky

1. Dokažte, že spojnice bodů, které vyznačují na ciferníku hodin časy 1,6 a 5,8, jsou k sobě kolmé.

2. (The Art Gallery Problem) Uvažujme půdorys galerie jako jednoduchý mnohoúhelník (tj. mnohoúhelník bez samoprotínání a bez děr). Hlídači mohou stát pouze ve vrcholech tohoto mnohoúhelníku a každý hlídač vidí všechny body galerie, které s ním lze spojit úsečkou ležící celou uvnitř galerie.

   Jaký je minimální počet hlídačů, který musíme mít k dispozici, abychom byli schopni pokrýt i ten nejnepříznivější tvar galerie s n vrcholy?

   Svůj výsledek zdůvodněte.



3. Do kružnice je vepsán trojúhelník ABC, jehož vrcholy dělí danou kružnici na tři kružnicové oblouky, jejichž délky jsou v poměru 2 : 3 : 7. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.
4. Vyjádřete poloměr kružnice opsané r a poloměr kružnice vepsané ϱ pravidelnému pětiúhelníku, jehož strana má délku a.
5. Do kružnice k se středem S a poloměrem 24 cm jsou vepsány dvě kružnice l_1, l_2 o poloměrech 12 cm tak, že s kružnicí k mají vnitřní dotyk a spolu navzájem mají vnější dotyk v bodě S. Vypočítejte poloměr kružnice m, která se dotýká všech tří zadaných kružnic.

2 Řešení

2.1 Trojúhelníky

1. Na základě následujícího textu:
   a) označte části (znění, výklad, určení, konstrukce, důkaz, závěr),
   b) proveďte konstrukci,
   c) zdůvodněte, proč je trojúhelník rovnostranný.

   (a) *Identifikace částí Eukleidova textu.*

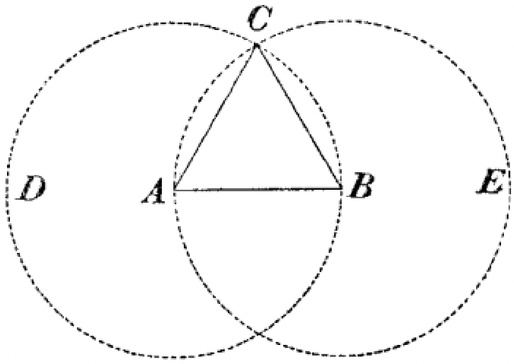
   - Znění: „Na dané přímce omezené postav trojúhelník rovnostranný.“
   - Výklad: „Danou přímkou omezenou buď AB.“
   - Určení: „Má se tedy na přímce AB postaviti trojúhelník rovnostranný.“
   - Konstrukce: „Ze středu A poloměrem AB buď narýsován kruh BCD, a opět ze středu B poloměrem BA buď narýsován kruh ACE, a od bodu C, v němž kruhy se protínají, k bodům A, B buďte vedeny spojnice AC, CB.“
   - Důkaz: „A ježto bod A je středem kruhu CDB, AC je stejné s AB;...“ až po „...ty tři tedy, CA, AB, BC jsou si rovny.“
   - Závěr: „Je tedy trojúhelník ABC rovnostranný a postaven jest na dané přímce omezené AB; což právě bylo vykonati.“

   (b) *Konstrukce* (viz obrázek 1).

   (c) *Zdůvodnění, proč je trojúhelník ABC rovnostranný.*

   Sestrojíme kružnici se středem A a poloměrem AB a kružnici se středem B a poloměrem BA. Nechť C je jejich průsečík. Potom platí:

   - Protože C leží na kružnici se středem A a poloměrem AB, je
   $$AC = AB.$$
   - Protože C leží na kružnici se středem B a poloměrem BA, je
   $$BC = BA = AB.$$



Obrázek 2: Konstrukce.

Dostáváme tedy

$$AC = AB \quad \text{a} \quad BC = AB,$$

a tedy všechny tři strany trojúhelníku jsou shodné:

$$AC = AB = BC.$$

2. Dokažte následující tvrzení: V každém trojúhelníku je součet velikostí vnitřních úhlů roven 180°.

   Součet vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku je vždy 180°. Důkaz vychází z konstrukce přímky rovnoběžné se stranou trojúhelníka, která prochází protilehlým vrcholem. Tím vznikají střídavé úhly, které spolu s vnitřním úhlem u vrcholu tvoří přímý úhel o velikosti 180°.

3. Určete, kde (uvnitř trojúhelníku, na jeho obvodu, nebo vně) leží průsečíky:

   - těžnic T (těžiště),
   - os stran S_o (střed kružnice opsané),
   - os úhlů S_v (střed kružnice vepsané),
   - výšek O (ortocentrum).

     - Těžiště T leží vždy uvnitř každého trojúhelníku.
     - Střed kružnice vepsané S_v (průsečík os úhlů) leží vždy uvnitř každého trojúhelníku.

     Dále záleží na typu trojúhelníku.
     1. Ostroúhlý trojúhelník
     Všechny čtyři body T, S_o, S_v, O leží uvnitř trojúhelníku.
     2. Pravoúhlý trojúhelník

     - Ortocentrum O leží ve vrcholu pravého úhlu.
     - Střed kružnice opsané S_o leží ve středu přepony (na obvodu).

3. Tupoúhlý trojúhelník

   - Ortocentrum O leží vně trojúhelníku.
   - Střed kružnice opsané S_o leží vně trojúhelníku.

   Poznámka.
   Všechny čtyři body T, S_o, S_v, O splývají právě tehdy, když je trojúhelník rovnostranný.

4. V rovině je dáno n různých bodů, přičemž žádné tři z nich neleží na jedné přímce. Kolik různých přímek je těmito body určeno?

   Úlohu lze řešit několika způsoby.

   a) Rekurentní postup
   Označme a_n počet přímek určených n body.
   Pro malé hodnoty dostáváme:

   $$a_1 = 0, \qquad a_2 = 1, \qquad a_3 = 3, \qquad a_4 = 6, \qquad a_5 = 10.$$

   Vidíme, že při přidání nového bodu vznikne vždy $(n-1)$ nových přímek, tedy

   $$a_n = a_{n-1} + (n-1).$$

   Odtud

   $$a_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1).$$

   Součet aritmetické řady dává

   $$a_n = \frac{(n-1)n}{2}.$$

   b) Kombinatorický přístup
   Každá přímka je určena dvojicí různých bodů.
   Počet neuspořádaných dvojic z n bodů je

   $$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

   c) Logická úvaha Každý z n bodů spojíme se všemi ostatními, čímž získáme

   $$n(n-1)$$

   spojení.
   Každá přímka je však započítána dvakrát (jednou z každého konce), proto celkový počet přímek je

   $$\frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\boxed{\text{Počet přímek určených } n \text{ body je } \frac{n(n-1)}{2}.}$$

5. Dokažte, že v trojúhelníku ABC platí pro délky těžnic t_a, t_b, t_c nerovnosti

$$\frac{1}{2}(a+b+c) < t_a + t_b + t_c < a + b + c.$$

(1) Dolní odhad.

Uvažujme trojúhelníky ABT, ATC, TBC. Z trojúhelníkové nerovnosti v těchto trojúhelnících dostáváme:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b &> c,\\
\frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_c &> b,\\
\frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_c &> a.
\end{aligned}$$

Sečtením těchto tří nerovností:

$$\frac{4}{3}(t_a + t_b + t_c) > a + b + c.$$

Odtud plyne

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < t_a + t_b + t_c.$$

Tím spíše tedy platí

$$\frac{1}{2}(a+b+c) < t_a + t_b + t_c.$$

(2) Horní odhad.

Z trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku ABC (resp. z úvah nad rozdělením stran pomocí těžnic) dostáváme:

$$\begin{aligned}
a + c &> 2t_b,\\
a + b &> 2t_c,\\
b + c &> 2t_a.
\end{aligned}$$

Sečtením těchto nerovností dostáváme

$$2(a+b+c) > 2(t_a + t_b + t_c).$$

Po vydělení dvěma:

$$t_a + t_b + t_c < a + b + c.$$

Celkem tedy platí

$$\frac{1}{2}(a+b+c) < t_a + t_b + t_c < a+b+c.$$

6. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Nad stranami AC a AB jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ACM a ANB.

   Dokažte, že
   $$|BM| = |CN|.$$

   Uvažujme trojúhelníky ANC a ABM.

   Protože $\triangle ACM$ a $\triangle ANB$ jsou rovnostranné, platí
   $$AC = AM, \qquad AB = AN,$$
   a zároveň
   $$\angle CAM = 60^\circ, \qquad \angle NAB = 60^\circ.$$
   Z toho plyne, že
   $$\angle CAN = \angle MAB.$$
   Máme tedy:
   $$AC = AM, \qquad AN = AB, \qquad \angle CAN = \angle MAB.$$
   Trojúhelníky $\triangle ANC$ a $\triangle ABM$ jsou tedy shodné podle věty sus.

   Z této shodnosti plyne rovnost odpovídajících stran:
   $$|CN| = |BM|.$$

7. Dokažte Pythagorovu větu jako přímý důsledek vět Eukleidových.

   Nechť $\triangle ABC$ je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C. Označme délky stran
   $$|BC| = a, \qquad |AC| = b, \qquad |AB| = c.$$
   Nechť pata výšky z bodu C na přeponu AB dělí přeponu na úseky
   $$c_a \quad \text{a} \quad c_b,$$
   takže
   $$c = c_a + c_b.$$
   Z podobnosti trojúhelníků (Eukleidovy věty o odvěsnách) platí
   $$a^2 = c \cdot c_a,$$
   $$b^2 = c \cdot c_b.$$
   Sečtením obou rovností dostaneme
   $$a^2 + b^2 = c \cdot c_a + c \cdot c_b = c(c_a + c_b).$$
   Protože $c_a + c_b = c$, dostáváme
   $$a^2 + b^2 = c^2.$$

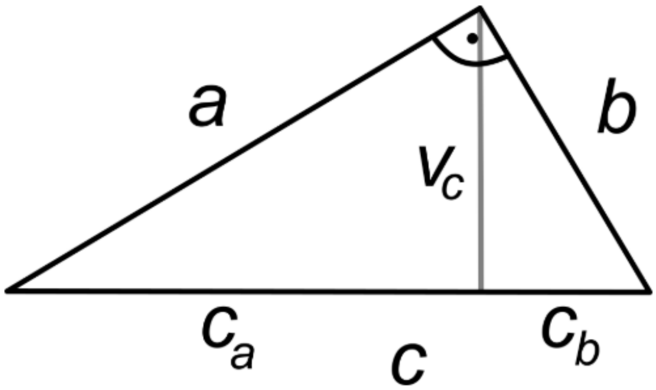
8. Dokažte Eukleidovy věty jako přímý důsledek věty Pythagorovy.

   Nechť $\triangle ABC$ je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C. Označme (viz obrázek 2)
   $$|BC| = a, \qquad |AC| = b, \qquad |AB| = c.$$
   Nechť výška z vrcholu C na přeponu AB má délku v a dělí přeponu na úseky
   $$c_a \quad \text{a} \quad c_b,$$
   takže
   $$c = c_a + c_b.$$
   Z Pythagorovy věty platí:
   $$a^2 + b^2 = c^2, \tag{1}$$
   $$v^2 + c_b^2 = b^2, \tag{2}$$
   $$v^2 + c_a^2 = a^2. \tag{3}$$

   Eukleidova věta o výšce.
   Z rovnic (2) a (3) vyjádříme
   $$a^2 = v^2 + c_a^2, \qquad b^2 = v^2 + c_b^2.$$
   Dosadíme do (1):
   $$(v^2 + c_a^2) + (v^2 + c_b^2) = c^2.$$
   $$2v^2 + c_a^2 + c_b^2 = (c_a + c_b)^2.$$
   $$2v^2 + c_a^2 + c_b^2 = c_a^2 + 2c_ac_b + c_b^2.$$
   Odečtením $c_a^2 + c_b^2$ dostáváme
   $$2v^2 = 2c_ac_b,$$
   tedy
   $$v^2 = c_ac_b.$$

   Eukleidova věta o odvěsnách.
   Z rovnice (3) a vztahu $v^2 = c_ac_b$ plyne
   $$a^2 = v^2 + c_a^2 = c_ac_b + c_a^2 = c_a(c_a + c_b) = c_ac.$$
   Analogicky z rovnice (2):
   $$b^2 = v^2 + c_b^2 = c_ac_b + c_b^2 = c_b(c_a + c_b) = c_bc.$$

   Tím jsou Eukleidovy věty dokázány jako důsledek Pythagorovy věty.



Obrázek 3: Značení trojúhelníku pro EV.

9. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C jsou dány odvěsny $a = 4\,\text{cm}$ a $b = 3\,\text{cm}$. Délka přepony je

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\,\text{cm}.$$

Osa úhlu při vrcholu C protíná stranu AB v bodě K a dělí ji v poměru přilehlých stran, tedy

$$\frac{AK}{KB} = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}.$$

Protože $AK + KB = AB = 5$, dostáváme

$$AK = \frac{3}{3+4} \cdot 5 = \frac{15}{7}\,\text{cm}.$$

Výsledek: $AK = \dfrac{15}{7}$ cm.

Zdůvodnění lze nalézt v materiálech paní doktorky Hromadové: Geogebra 1

Na základě diskuze během cvičení zdůvodnění více rozepíšeme i zde (přičemž je doporučeno během čtení nahlížet do konstrukce v geogebře):
Poměr vycházející z konstrukce je: $\frac{|AK|}{|BK|} = \frac{|AC|}{|BC|}$.
Využijeme vztah pro podobnost, tj.

$$|X'Y'| = k|XY|.$$

Trojúhelník ACD je rovnoramenný.
$\triangle ADK \sim \triangle BCK$

$$\frac{|AK|}{|AD|} = \frac{|KB|}{|CB|}$$

$$\frac{|AK|}{|BK|} = \frac{|AD|}{|CB|} = \frac{|AC|}{|CB|}.$$

10. Postup lze nalézt rovněž v materiálech paní doktorky Hromadové: Geogebra 2.

2.2 Kružnice, mnohoúhelníky

1. Dokažte, že spojnice bodů, které vyznačují na ciferníku hodin časy 1,6 a 5,8, jsou k sobě kolmé.

$$360^\circ : 12 = 30^\circ$$

$$|\angle 6S8| = 60^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 30^\circ$$

$$|\angle 5S1| = 120^\circ \;\Rightarrow\; \beta = 60^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \;\Rightarrow\; \gamma = 90^\circ$$

2. (The Art Gallery Problem) Uvažujme půdorys galerie jako jednoduchý mnohoúhelník (tj. mnohoúhelník bez samoprotínání a bez děr). Hlídači mohou stát pouze ve vrcholech tohoto mnohoúhelníku a každý hlídač vidí všechny body galerie, které s ním lze spojit úsečkou ležící celou uvnitř galerie.

   Jaký je minimální počet hlídačů, který musíme mít k dispozici, abychom byli schopni pokrýt i ten nejnepříznivější tvar galerie s n vrcholy?

   Svůj výsledek zdůvodněte.

   Řešení: K ostraze jakékoliv jednoduché galerie o n vrcholech nám vždy postačí $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ hlídačů.

   Zdůvodnění (Fiskův elegantní důkaz):

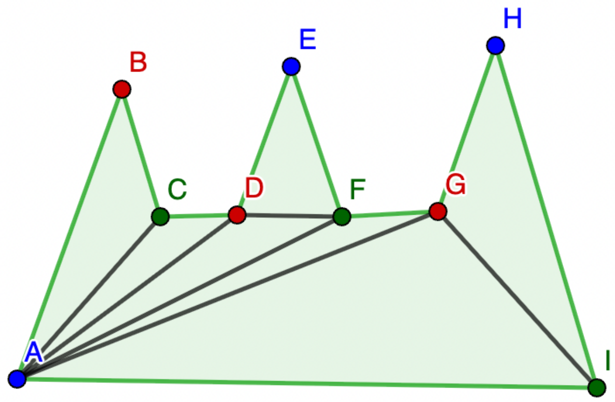
   (a) Triangulace: Celý prostor galerie si rozdělíme na trojúhelníky (pomocí úhlopříček, které se nekříží). Tím získáme $n - 2$ trojúhelníků.

(b) Obarvení 3 barvami: Všechny rohy (vrcholy) obarvíme třemi barvami tak, aby každý trojúhelník měl v rozích tři různé barvy.

(c) Výběr nejúspornější barvy: Protože máme n vrcholů a jen 3 barvy, matematicky existuje barva, která se vyskytuje na **maximálně** $\frac{n}{3}$ místech. Pokud postavíme hlídače do všech rohů s touto barvou, každý trojúhelník v galerii bude pod dohledem (protože každý trojúhelník má jeden roh s touto barvou).

Proč je toto číslo odpovědí?
Tento výsledek ($\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$) představuje tzv. 'bezpečný strop:

- Je to počet, který pokryje i ten nejhorší možný případ (tzv. hřebenové galerie).
- U jednodušších galerií (např. čtverec nebo hvězda) sice v praxi stačí méně lidí, ale my hledáme pravidlo, které selže až u extrémně složitých tvarů.



Obrázek 4: Triangulace a obarvení vrcholů grafu.

3. Do kružnice je vepsán trojúhelník ABC, jehož vrcholy dělí danou kružnici na tři kružnicové oblouky, jejichž délky jsou v poměru 2 : 3 : 7. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

$$2 + 3 + 7 = 12 \text{ dílů} \qquad \Rightarrow \qquad 360^\circ : 12 = 30^\circ$$

$$2\alpha = 3 \cdot 30^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 45^\circ$$

$$2\beta = 7 \cdot 30^\circ \;\Rightarrow\; \beta = 105^\circ$$

$$2\gamma = 2 \cdot 30^\circ \;\Rightarrow\; \gamma = 30^\circ$$

4. Vyjádřete poloměr kružnice opsané r a poloměr kružnice vepsané ϱ pravidelnému pětiúhelníku, jehož strana má délku a.

$$\varphi = \frac{360°}{10} = 36°$$

$$\sin\varphi = \frac{\frac{a}{2}}{r} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{a}{2\sin 36°}$$

$$\tan\varphi = \frac{\frac{a}{2}}{\varrho} \qquad \Rightarrow \qquad \varrho = \frac{a}{2\tan 36°}$$

5. Do kružnice k se středem S a poloměrem 24 cm jsou vepsány dvě kružnice l_1, l_2 o poloměrech 12 cm tak, že s kružnicí k mají vnitřní dotyk a spolu navzájem mají vnější dotyk v bodě S. Vypočítejte poloměr kružnice m, která se dotýká všech tří zadaných kružnic.

$$\triangle SML \text{ je pravoúhlý:}$$

$$|SL| = 12\,\text{cm}, \qquad |SM| = (24 - x)\,\text{cm}, \qquad |ML| = (12 + x)\,\text{cm}.$$

Použijeme Pythagorovu větu:

$$(24 - x)^2 + 12^2 = (12 + x)^2.$$

$$576 - 48x + x^2 + 144 = 144 + 24x + x^2.$$

$$576 = 72x.$$

$$x = \frac{576}{72} = 8\,\text{cm}.$$