Planimetrie

Co je bod? Co je přímka?

Trojúhelníky

1. Na základě následujícího textu označte části:
   - znění (formulace věty)
   - výklad (označení prvků)
   - určení (co je třeba sestrojit)
   - konstrukce (samotné sestrojení)
   - důkaz (logické odůvodnění správnosti)
   - závěr (shrnutí)

b) proveďte konstrukci,

c) zdůvodněte, proč je trojúhelník rovnostranný.

I.

Na dané přímce omezené postav trojúhelník rovnostranný.

Danou přímkou omezenou buď AB. Má se tedy na přímce AB postaviti trojúhelník rovnostranný.

Ze středu A poloměrem AB buď narýsován kruh BCD, a opět ze středu B poloměrem BA buď narýsován kruh ACE, a od bodu C, v němž kruhy se protínají, k bodům A, B buďte vedeny spojnice AC, CB. A ježto bod A je středem kruhu CDB, AC je stejné s AB; ježto dále bod B je středem kruhu CAE, jest BC stejné s BA. Bylo pak dokázáno, že i CA je stejné s AB; tedy jedna i druhá z CA, CB je stejná s AB. Veličiny však témuž rovné i navzájem rovny jsou; tedy též CA jest rovna CB; ty tři tedy, CA, AB, BC jsou si rovny. Je tedy trojúhelník ABC rovnostranný a postaven jest na dané přímce omezené AB; což právě bylo vykonati.

Eukleidovy Základy. Přel. Fr. Servít, Praha, 1907.

2. Dokažte následující tvrzení: V každém trojúhelníku je součet velikostí vnitřních úhlů roven 180°.
   Bonus: V každém?

3. Určete, kde (uvnitř trojúhelníku, na jeho obvodu, nebo vně) leží průsečíky:
   - těžnic T (těžiště),
   - os stran S_o (střed kružnice opsané),
   - os úhlů S_v (střed kružnice vepsané),
   - výšek O (ortocentrum).

4. V rovině je dáno n různých bodů, přičemž žádné tři z nich neleží na jedné přímce. Kolik různých přímek je těmito body určeno?

5. Dokažte, že v trojúhelníku ABC platí pro délky těžnic t_a, t_b, t_c nerovnosti

$$\frac{1}{2}(a+b+c) < t_a + t_b + t_c < a + b + c.$$

6. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Nad stranami AC a AB jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ACM a ANB.

   Dokažte, že

$$|BM| = |CN|.$$

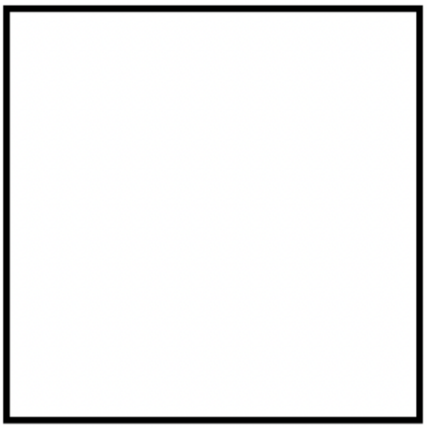
7. Dokažte Pythagorovu větu jako přímý důsledek vět Eukleidových.

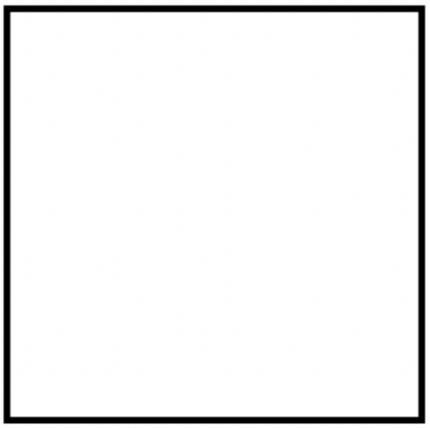
8. Dokažte Eukleidovy věty jako přímý důsledek věty Pythagorovy.

9. V pravoúhlém trojúhelníku ABC o odvěsnách $a = 4\,\text{cm}$ a $b = 3\,\text{cm}$ protíná osa úhlu při vrcholu C přeponu AB v bodě K. Vypočtěte délku úsečky AK.

10. Uvnitř ostrého úhlu různoběžek a, b je dán bod C, který neleží na žádné z nich. Zapište stručný popis konstrukce trojúhelníku ABC takového, že $A \in a$, $B \in b$ a obvod trojúhelníku ABC je minimální.

Poznámka: Pomocný obrázek k náčrtku důkazu Pythagorovy věty.





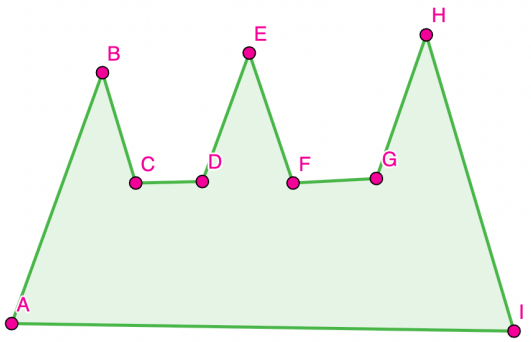
Kružnice, mnohoúhelníky

1. Dokažte, že spojnice bodů, které vyznačují na ciferníku hodin časy 1,6 a 5,8, jsou k sobě kolmé.

2. (The Art Gallery Problem) Uvažujme půdorys galerie jako jednoduchý mnohoúhelník (tj. mnohoúhelník bez samoprotínání a bez děr). Hlídači mohou stát pouze ve vrcholech tohoto mnohoúhelníku a každý hlídač vidí všechny body galerie, které s ním lze spojit úsečkou ležící celou uvnitř galerie.

   Kolik hlídačů je třeba nejvýše k zajištění toho, aby byl celý prostor galerie pod dohledem, jestliže galerie má n vrcholů?

   Svůj výsledek zdůvodněte.



3. Do kružnice je vepsán trojúhelník ABC, jehož vrcholy dělí danou kružnici na tři kružnicové oblouky, jejichž délky jsou v poměru $2 : 3 : 7$. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

4. Vyjádřete poloměr kružnice opsané R a poloměr kružnice vepsané r pravidelnému pětiúhelníku, jehož strana má délku a.

5. Do kružnice k se středem S a poloměrem 24 cm jsou vepsány dvě kružnice l_1, l_2 o poloměrech 12 cm tak, že s kružnicí k mají vnitřní dotyk a spolu navzájem mají vnější dotyk v bodě S. Vypočítejte poloměr kružnice m, která se dotýká všech tří zadaných kružnic.