Kombinatorika: opakování

1. Máme množinu se čtyřmi prvky: $M = \{a, b, c, d\}$. Vypiš všechny dvoučlenné variace sestavené z těchto čtyř prvků. Urči jejich počet pomocí vzorce.

2. Tři obětaví studenti losují o pořadí, ve kterém se nechají „dobrovolně“ vyzkoušet. Kolika způsoby může losování skončit?

3. Urči, kolika způsoby může dopadnout hod třemi kostkami, pokud kostky:

   a) jsou všechny stejné (nerozlišitelné),

   b) mají různé barvy (rozlišitelné).

4. Urči, kolika způsoby je možné na šachovnici 8×8 vybrat:

   (a) trojici políček,

   (b) trojici políček neležících v jednom sloupci,

   (c) trojici políček neležících v jednom sloupci ani v jedné řadě,

   (d) trojici políček, která nemají stejnou barvu.

5. Určete počet všech trojúhelníků, které mají vrcholy ve vrcholech pravidelného šestnáctiúhelníku a které nejsou pravoúhlé.

Řešení:

1. Je dána pětiprvková množina: $M = \{a, b, c, d\}$. Vypiš všechny dvoučlenné variace sestavené z těchto čtyř prvků. Urči počet kombinací pomocí vzorce.

   Řešení:

   Vypisujeme variace:

   $$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\},$$
   $$\{b, a\}, \{b, c\}, \{b, d\},$$
   $$\{c, a\}, \{c, b\}\{c, d\},$$
   $$\{d, a\}, \{d, b\}\{d, c\}.$$

   Celkem $12 = 4 \cdot 3$ variací.

   —

2. Tři obětaví studenti losují o pořadí, ve kterém se nechají „dobrovolně“ vyzkoušet. Kolika způsoby může losování skončit?

   6 možností.

3. Urči, kolika způsoby může dopadnout hod třemi kostkami, pokud kostky:

   a) jsou všechny stejné (nerozlišitelné),

b) mají různé barvy (rozlišitelné).

Na každé kostce může padnout šest různých čísel.

a) kostky jsou všechny stejné (nerozlišitelné)

Nezáleží na tom, na které kostce padlo konkrétní číslo (kostky nerozlišujeme), tedy vybíráme neuspořádanou trojici čísel z šesti s opakováním.

$$K_3'(6) = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56$$

možností.

b) kostky mají různé barvy (rozlišitelné)

Kostky rozlišujeme, tedy záleží na pořadí. Každou kostku můžeme chápat jako jedno místo (první, druhá, třetí).

Na každé z těchto tří pozic máme 6 možností, které mezi sebou násobíme:

$$V_3'(6) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$$

možností.

4. Urči, kolika způsoby je možné na šachovnici 8×8 vybrat:

   a) trojici políček,

   b) trojici políček neležících v jednom sloupci,

   c) trojici políček neležících v jednom sloupci ani v jedné řadě,

   d) trojici políček, která nemají stejnou barvu.

Řešení:

(a) Urči, kolika způsoby je možné na šachovnici 8×8 vybrat:

a) trojici políček
Vybíráme tři políčka ze 64, nezáleží na pořadí výběru (záleží pouze na tom, která políčka jsme vybrali). Sestavujeme tedy tříčlenné kombinace ze 64:

$$\binom{64}{3} = 41664.$$

b) trojici políček neležících v jednom sloupci (2 v jednom a 1 v jiném, or 3 v různách sloupcích)
Použijeme nepřímý postup: od všech trojic odečteme ty, které leží v jednom sloupci.

- všechny trojice: $\binom{64}{3}$,
- trojice v jednom sloupci: vybíráme 3 z 8 políček, sloupců je 8:

$$8 \cdot \binom{8}{3}.$$

Celkem:

$$\binom{64}{3} - 8 \cdot \binom{8}{3} = 41216.$$

c) trojici políček neležících v jednom sloupci ani v jedné řadě
Opět odečítáme nevhodné případy:

- trojice v jednom sloupci: $8 \cdot \binom{8}{3}$,

- trojice v jednom řádku: také $8 \cdot \binom{8}{3}$.

Celkem:

$$\binom{64}{3} - 8\binom{8}{3} - 8\binom{8}{3} = \binom{64}{3} - 16\binom{8}{3} = 40768.$$

d) trojici políček, která nemají stejnou barvu

Přímý postup:

Na šachovnici je 32 bílých a 32 černých políček.

Možnosti:

- 2 bílá + 1 černé:

$$\binom{32}{2} \cdot 32,$$

- 2 černá + 1 bílé:

$$\binom{32}{2} \cdot 32.$$

Celkem:

$$\binom{32}{2} \cdot 32 + \binom{32}{2} \cdot 32 = 2 \cdot 32 \cdot \binom{32}{2} = 64 \cdot \binom{32}{2} = 31744.$$

Nepřímý postup:

- všechny trojice: $\binom{64}{3}$,
- trojice bílých políček: $\binom{32}{3}$,
- trojice černých políček: $\binom{32}{3}$.

$$\binom{64}{3} - \binom{32}{3} - \binom{32}{3} = \binom{64}{3} - 2\binom{32}{3} = 31744.$$

Dodatek:

Výsledek $64 \cdot \binom{32}{2}$ lze interpretovat takto: nejprve vybereme jedno políčko (64 možností), poté vybíráme dvě políčka opačné barvy (32 možností).

Další rozklad:

- všechna tři políčka v různých sloupcích:

$$\frac{64 \cdot 56 \cdot 48}{3!} = 28672,$$

- dvě políčka ve stejném sloupci a jedno jinde:

$$\frac{64 \cdot 7 \cdot 56}{2!} = 12544.$$

Celkem:

$$28672 + 12544 = 41216.$$

5. Určete počet všech trojúhelníků, které mají vrcholy ve vrcholech pravidelného šestnáctiúhelníku a které nejsou pravoúhlé.

Nejprve spočítáme všechny trojúhelníky s vrcholy ve vrcholech pravidelného 16-úhelníku:

$$\binom{16}{3} = 560.$$

Nyní spočítáme pravoúhlé trojúhelníky. Všechny vrcholy pravidelného 16-úhelníku leží na jedné kružnici, a proto podle Thaletovy věty platí: trojúhelník je pravoúhlý právě tehdy, když má za jednu stranu průměr této kružnice (přepona je průměr).

V pravidelném 16-úhelníku je počet průměrů roven počtu dvojic protějších vrcholů, tj.

$$\frac{16}{2} = 8.$$

Zvolíme-li jeden konkrétní průměr (jeho krajní body), třetí vrchol pravoúhlého trojúhelníku může být libovolný z ostatních $16 - 2 = 14$ vrcholů, přičemž dostaneme různé pravoúhlé trojúhelníky. Žádný trojúhelník nemůže mít dvě různé přepony (dva průměry), takže nedochází k vícenásobnému započtení.
Počet pravoúhlých trojúhelníků je tedy

$$8 \cdot 14 = 112.$$

Počet nepravouhlých trojúhelníků je

$$560 - 112 = 448.$$

Výsledek: $\boxed{448}$.