

1 Zadání

Teorii k následujícím úlohám (především kapitola 1) lze nalézt ve skriptech kombinatorického mága doc. Antonína Slavíka: [Kombinatorika](#). Svým skvělým vedením také zaštitil mnoho padawanů, jejichž práce se promítají i do následujících příkladů.

Příklady na rozehrání:

1. Kolik čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže a) cifry se mohou opakovat? b) cifry se nesmí opakovat?
2. Kolik sudých čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se cifry nesmí opakovat?

Všechny cesty vedou do Říma

Pokyny: U následujících úloh použijte k řešení grafický strom a navrhněte k němu ještě aspoň jeden způsob řešení (např. vzorec, kombinatorické pravidlo součinu, kombinační číslo).

1. Máme trezor se zámkem na čtyřciferný kód, kde se žádné dvě cifry neopakují. Kolik existuje takovýchto kódů dělitelných pěti?
2. Máme sedm destiček. Na každé je jedno z následujících čísel 2, 3, 4, 6, 7, 8 a 9. Z pěti těchto destiček vytvoříme číslo popisné domu. Kolik popisných čísel bude lichých?
3. Na jedné farmě v jižních Čechách probíhalo sčítání králíků. Bohužel papír s finálním počtem rozžvýkal králík. Naštěstí dali zaměstnanci dohromady, že králíků je aspoň tisíc. Na zbytcích papíru našli čísla 1, 3, 4, 6 a 0. Z těchto cifer se tedy musel skládat počet králíků. Žádná z cifer se neopakovala. Kolik je možných výsledků sčítání králíků? Některé z těchto cifer se možná na papíře vyskytly u něčeho jiného a nemusely být použity v čísle udávající počet králíků.

Trpaslíci a králíci:

1. Tři trpaslíci sedí kolem stolu. Každému z nich vykouzlí čaroděj na hlavu zelený nebo červený klobouk. Když se klobouky objeví, čaroděj požádá ty, kteří vidí alespoň jeden červený klobouk, aby zvedli ruku. Na základě toho, co vidí, a informace o zvednutých rukou mají trpaslíci určit barvu svého klobouku. Kdo odpoví špatně, bude proměněn v žábu. Mohou si všichni vždy zachovat svou podobu?
2. Máme pár čerstvě narozených králíků. Kolik párů budeme mít po dvanácti měsících, jestliže
 - každý pár dospívá za jeden měsíc,
 - každému dospělému páru se každý měsíc narodí další pár,
 - králíci nehynou?

Úlohy vedoucí na rekurentní rovnice

1. Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1×1 , 1×2 vyplnit obdélník o rozměrech $1 \times n$?
2. Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1×1 , 1×2 , 1×3 vyplnit obdélník o rozměrech $1 \times n$?

3. **Hanojské věže:** Hlavolam sestává ze tří kolíků (značíme A , B a C) a n kotoučů (disků), které se na tyto kolíky dají nasouvat. Přitom se každé dva kotouče liší svojí velikostí.

Tahem se rozumí sejmutí vrchního kotouče z některého kolíku a jeho přemístění na jiný kolík, pochopitelně opět nahoru.

Platí pravidlo, že větší kotouč nemůže být umístěn na menším.

Jaký je minimální počet tahů potřebných k přemístění věže o n kotoučích z jednoho kolíku na jiný?

2 Řešení

Řešení úloh vedoucích na rekurentní rovnice se může zdát občas komplikované/zdlouhavé, ovšem v závěrečném testu by byl případně vyžadován jen intuitivní myšlenkový postup, počáteční hodnoty a rekurentní vztah, tj. řešení na pár řádků (například ověření, zda se jedná o optimální řešení není třeba, detailní řešení jsou uvedena pro úplnost a zvědavé čtenáře).

Příklady na rozebrání:

1. a) 1080 možností, b) 300 možností.
2. 156.

Všechny cesty vedou do Říma

1. Trezor: 5040.
2. Číslo popisné: 1080.
3. Farma: 192.

Různé postupy řešení a další úlohy podobného typu lze nalézt v bakalářské práci: [Sbírka řešených úloh z kombinatoriky – variace bez opakování](#).

Trpaslíci a králíci

- 1) Řešení úlohy a další vtipné hádanky lze nalézt v práci (Úloha 1.1): [Kombinatorické úlohy o klobúkoch](#).
- 2) $F_{12} = 233$.
Podrobné řešení úlohy lze nalézt v sekci 6.1: [Kombinatorika](#).

Úlohy vedoucí na rekurentní rovnice

1. Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1×1 a 1×2 vyplnit obdélník o rozměrech $1 \times n$?

Řešení. Jak je v kombinatorice obvyklé, budeme dlaždice 1×2 zkráceně nazývat domina a dlaždice 1×1 budou monomina. Nechť p_n značí hledaný počet způsobů, jak pomocí monomin a domin vyplnit obdélník $1 \times n$.

Snadno zjistíme p_n pro nízké hodnoty $n \in \mathbb{N}$:

$$p_1 = 1 \quad (1 \text{ monomino}), \quad p_2 = 2 \quad (\text{jedno domino nebo dvě monomina}),$$

$$p_3 = 3 \quad (\text{monomino a domino, nebo domino a monomino, nebo tři monomina}).$$

Úloha dává smysl i pro $n = 0$, kdy je rozumné položit $p_0 = 1$, neboť obdélník s nulovým obsahem lze vyplnit jediným způsobem – nevezmeme žádnou dlaždici.

Předchozí hodnoty se shodují s Fibonacciho čísly, což napovídá, že by mohlo platit $p_n = F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Ukažme, že členy posloupnosti $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňují stejnou rekurentní rovnici, jako Fibonacciho čísla.

Obdélník $1 \times n$, kde $n \geq 2$, lze vyplnit p_n způsoby a jsou dvě možnosti, jak začít: buď monominem, nebo dominem (viz obrázek 6.2). V prvním případě zbývá vyplnit obdélník $1 \times (n-1)$, což lze učinit p_{n-1} způsoby. Ve druhém případě zbývá vyplnit obdélník $1 \times (n-2)$, což lze učinit p_{n-2} způsoby.

Z předchozí úvahy vyplývá, že pro každé $n \geq 2$ platí

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}.$$

Jelikož $p_0 = 1$ a $p_1 = 1$, vidíme, že musí platit $p_n = F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. □

Řešení převzato ze skript [Kombinatorika](#), Úloha 6.2.1.

2. Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1×1 , 1×2 , 1×3 vyplnit obdélník o rozměrech $1 \times n$?

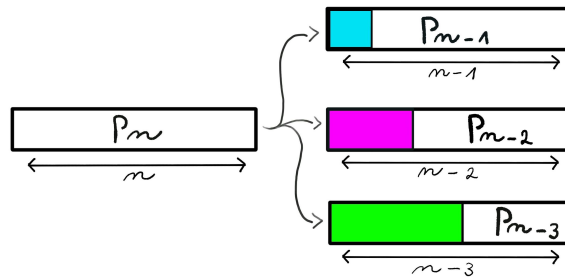
Řešení: Dlaždice o rozměrech 1×1 budeme zkráceně nazývat monomina, 1×2 domina a 1×3 tromina. Nechť T_n značí hledaný počet způsobů, jak lze pomocí monomin, domin a tromin vydláždit obdélník o rozměrech $1 \times n$. Zaměříme se nejdříve na T_n pro nízké hodnoty $n \in \mathbb{N}_0$: $T_1 = 1$ (1 monomino), $T_2 = 2$ (2 monomina, nebo 1 domino), $T_3 = 4$ (3 monomina, nebo 1 monomino a 1 domino, nebo 1 domino a 1 monomino, nebo 1 tromino). Úlohu bychom mohli řešit i pro $n = 0$, položili bychom $T_0 = 1$, neboť obdélník s nulovým obsahem můžeme vydláždit jen jedním způsobem, tj. pokud nevezmeme žádnou dlaždici.

Co kdybychom ovšem chtěli zkoumat vyšší hodnoty $n \in \mathbb{N}_0$? Zkusíme odvodit rekurentní rovnici.

Obdélník o rozměrech $1 \times n$, kde $n \geq 3$, lze vydláždit T_n způsoby, přičemž máme tři možnosti jak začít: buď monominem, nebo dominem, nebo trominem. V prvním případě zbývá vyplnit obdélník $1 \times (n-1)$, čehož dosáhneme T_{n-1} způsoby. V druhém případě dláždíme obdélník $1 \times (n-2)$, což učiníme T_{n-2} způsoby. Ve třetím případě pokrýváme obdélník o rozměrech $1 \times (n-3)$ a dláždíme T_{n-3} způsoby, viz obrázek 2. Tedy už si snadno všimneme, že pro každé $n \geq 3$ platí

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}. \tag{1}$$

Vztah (1) je v literatuře označován jako Tribonacciho čísla. Více se o nich lze dozvědět zde: [Tribonacciho kód](#).



Obrázek 1: Tři způsoby, jak lze začít dláždit obdélník $1 \times n$ za pomoci monomin, domin a tromin.

3. **Hanojské věže:** Hlavolam sestává ze tří kolíků (značíme A , B a C) a n kotoučů (disků), které se na tyto kolíky dají nasouvat. Přitom se každé dva kotouče liší svojí velikostí.

Tahem se rozumí sejmutí vrchního kotouče z některého kolíku a jeho přemístění na jiný kolík, pochopitelně opět nahoru.

Platí pravidlo, že větší kotouč nemůže být umístěn na menším.

Jaký je minimální počet tahů potřebných k přemístění věže o n kotoučích z jednoho kolíku na jiný?

Řešení: Můžeme předpokládat, že všechny kotouče jsou na kolíku A a naším cílem je přesunout je na C . Minimální počet tahů při n kotoučích označíme H_n . Např. pro $n = 3$ je $H_n = 7$, viz obr. 2.

Klíčovou otázkou vedoucí k řešení je, v jaké situaci přesuneme největší kotouč. Ten musí být nutně přesunut alespoň jednou, z A na C , což je možné pouze ve chvíli, kdy jsou všechny ostatní kotouče na kolíku B . Problém si tedy můžeme rozdělit do tří kroků:

- (a) Přesuneme $n - 1$ vrchních kotoučů z A na B .
- (b) Přesuneme největší kotouč z A na C .
- (c) Přesuneme $n - 1$ kotoučů z B na C .

Rozmyslíme si, že toto řešení je optimální. Pokud bychom největší kotouč přesouvali víc než jednou, nijak tím nesnížíme počet přesouvání ostatních kotoučů. Dále si uvědomíme, že největší kotouč nikdy neomezuje pohyby ostatních a že přesouvání z A na B je stejně náročné jako přesouvání z A na C (stačí prohodit označení kolíků B a C), a proto kroky 1 a 3 vyžadují každý H_{n-1} tahů. Krok 2 zvládneme v jednom tahu. Díky této úvaze dospíváme k rekurentním rovnicím

$$H_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1, \\ 2H_{n-1} + 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Na základě těchto rovnic snadno dojdeme k explicitnímu vyjádření H_n . Můžeme použít substituci, a to tak, že nejdříve k oběma stranám přičteme jedničku. Dostáváme

