

Milá čtenářko, milý čtenáři,
tento materiál byl vytvořen čistě na základě dotazů, které byly položeny během semináře. Je určen pro zvědavé duše, a **nebude tedy obsahem závěrečného testu**.

Myšlenky, které jsou zde sepsány, mi přijdou užitečné pro budoucí počínání jakéhokoli mff prváka, avšak to neznamená, že bys bez nich v divočině nepřežil (spánek je stále důležitější). Rozhodně se nejedná o plnohodnotný studijní materiál (témata, kterých se text týká, se někdy vyučují i celý semestr). Cílem textíku je motivovat Tvé další bádání, kladení otázek a zájem nejen o matematiku. Vzhledem k tomu že si dočetl až sem, je možná tento text právě pro Tebe.

1 Geometrie vs Lineární algebra

Na přednášce zazněl dotaz: „**Jaký je rozdíl mezi geometrií a lineární algebrou?**“

Podívejme se na odpověď podrobněji.

Geometrie (nejen analytická), lineární algebra a diferenciální počet spolu úzce souvisejí, ale každý z těchto oborů se na prostor dívá jinak.

Lineární algebra pracuje s objekty, které jsou „ukotvené v nule“. Základním objektem je vektor a lineární kombinace vektorů. Například vektorová přímka (podprostor), viz Obrázek 1, má tvar

$$p = \{t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

a vždy prochází počátkem.

Geometrie (afinní) naopak pracuje s body a posuny. Přímka zde má tvar

$$p = \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

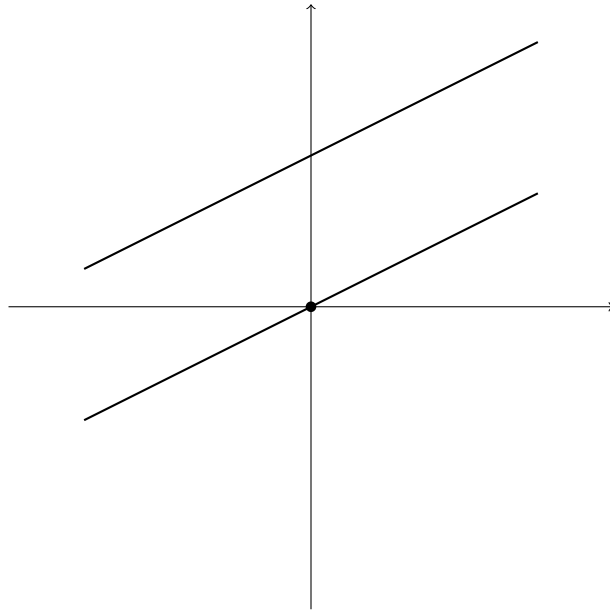
tedy je určena bodem A a směrem \vec{u} , a nemusí procházet počátkem.

Diferenciální počet tyto dva pohledy propojuje. Mějme funkci f a bod x_0 . Tečna ke grafu funkce v tomto bodě je afinní přímka s rovnicí:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Zde:

- bod $(x_0, f(x_0))$ je prvek afinního prostoru (poloha),
- výraz $(x - x_0)$ je vektor (posun),
- derivace $f'(x_0)$ určuje lineární zobrazení (lokální změnu).



Obrázek 1: Vektorová přímka procházející počátkem (= nulový vektor) a posunutá afinní přímka.

Zjednodušené shrnutí: Vesmír bez Slunce

Může existovat přímka, i když neexistuje počátek soustavy souřadnic (bod $[0, 0, 0]$)?

Varianta A: Ano, prostě tam v prostoru visí čára. —To je geometrie.

Varianta B: Aby s danou čarou mohla pracovat lineární algebra, musíme si ten počátek vesmíru zvolit (třeba Slunce). Teprve pak můžeme psát rovnice a násobit maticemi. Lineární algebra potřebuje "kotvu"(nulový vektor), geometrie ne.

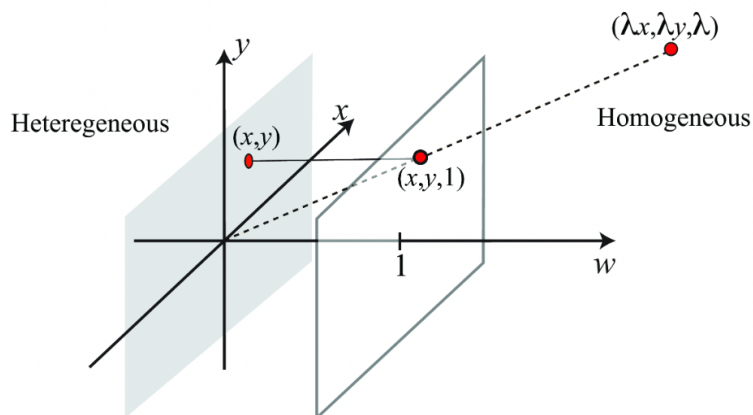
Během semináře zazněla též otázka: Nevyužívá počítačová grafika lineární algebru?

Lineární algebre a geometrii jsme se již trochu věnovali, co se ovšem u počítačové grafiky používá a jakou roli hraje geometrie?

Pro úplný začátek doporučuji zhlédnout, jak se přepočítávají 3D transformace podle matic (především čas 3:48): 3D grafika: Transformace.

Projektivní geometrie a homogenní souřadnice

Při výkladu homogenních souřadnic musíme nejprve změnit způsob, jakým nahlížíme na základní geometrické objekty. Zapomeňme na okamžik na bod jako na pouhou tečku v rovině (Heterogeneous). Jak vidíme na Obrázku 2, v systému homogenních souřadnic interpretujeme bod v rovině jako celou přímku – tedy světelný paprsek, který prochází počátkem $[0, 0, 0]$ v trojrozměrném prostoru.



Obrázek 2: Homogenní souřadnice

Představme si pomocnou rovinu, která protíná osu w v hodnotě 1. Tato rovina reprezentuje náš monitor nebo list papíru. Libovolný bod v této rovině pak reprezentujeme právě jako paprsek vycházející z počátku a procházející bodem $(x, y, 1)$. Na tomto paprsku leží nekonečně mnoho reprezentací téhož bodu, které můžeme zapsat obecně jako $(\lambda x, \lambda y, \lambda)$, kde λ je libovolný nenulový parametr. To je podstata pojmu Homogeneous – body na stejném paprsku jsou pro nás v průmětu totožné.

Klíčový moment pro pochopení nekonečna nastává ve chvíli, kdy sledujeme polohu paprsku vzhledem k ose w . Představme si, že se náš bod začne v bílé průmětně ($w = 1$) vzdalovat „do dálky“, tedy směrem od středu listu papíru k jeho okraji a dál. Na obrázku vidíme, že aby paprsek z počátku tento vzdalující se bod stále zasahoval, musí se čím dál více stáčet (pokládat) směrem doleva k šedé rovině xy .

Bod v nekonečnu pak definujeme jako paprsek, který už do bílé průmětny vůbec nezasahuje, protože leží přímo v šedé rovině ($w = 0$). Takový paprsek je s naší průmětnou rovnoběžný, nikdy ji neprotne, ale v prostoru má stále jasně definovaný směr. V homogenních souřadnicích jej proto zapisujeme jako $(x, y, 0)$. Ta nula na konci je pro nás jasným signálem: „Tento objekt nemá v naší průmětně konečnou polohu, ale představuje směr mířící do nekonečna.“

Tento pohled nám dovoluje pochopit, proč se v projektivní geometrii rovnoběžky protínají. Představme si dvě rovnoběžné přímky na zemi (např. koleje). Obě tyto přímky obsahují stejný směr, a tedy v našem modelu sdílejí stejný „bod v nekonečnu“. Protože obě přímky tento bod (paprsek) sdílejí, z definice se v něm protínají. Na horizontu tak vidíme průsečík objektů, které jsou v reálném světě rovnoběžné. V počítačové grafice tento princip využíváme u matic 4×4 . Pokud maticí translace (posunutí) vynásobíme bod, který má $w = 1$, jeho poloha se změní (viz případně video zmíněno v zeleném rámečku výše). Pokud jí však vynásobíme směr (vektor), který má $w = 0$, matice na něj nemá žádný vliv. To je matematicky naprosto konzistentní: posunout „nekonečno“ o jakoukoli konečnou vzdálenost jeho polohu nijak nezmění.

Role souřadnice w v homogenním zápisu

Pro snadné pochopení významu poslední složky v homogenních souřadnicích $[x, y, w]$ si můžeme představit analogii s laserovým ukazovátkem:

- Hodnota $w = 1$ (Stěna): Představuje stěnu přímo před vámi. Když na tuto stěnu posvítíte, uvidíte jasnou tečku. Tato tečka má svou pevnou a měřitelnou polohu v rovině.
- Hodnota $w = 0$ (Otevřené okno): Znamená, že jste se otočili a svítíte do otevřeného okna směrem do prázdnoty (do nekonečna). Paprsek nikam nedopadne, žádná tečka na žádném povrchu nevznikne. To, co v prostoru vidíte, je již jen samotný paprsek, tedy jeho směr.

Otázka: Chceme-li tedy v grafice provést posunutí (translaci) objektu, jaká transformace nám pomůže a jak jí matematicky dosáhneme?

Problém: V klasických 2D souřadnicích $[x, y]$ je posunutí definováno jako sčítání: $x' = x + t_x$. Lineární algebra však pracuje primárně s násobením matic. Abychom mohli i posunutí zapsat jako násobení, musíme přejít do homogenních souřadnic.

Řešení: K dosažení translace využijeme matici typu 3×3 a bod v homogenním zápisu $[x, y, 1]$.

Matice translace

Chceme-li posunout bod o hodnotu t_x na ose x a t_y na ose y , použijeme matici:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad v praxi

Předpokládejme, že chceme posunout bod v počátku $A = [0, 0]$ o jednotku doprava ($t_x = 1$). Převédeme bod do homogenních souřadnic: $A \rightarrow (0 \ 0 \ 1)^T$.

Výpočet transformace $A' = T \cdot A$ pak vypadá následovně:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) + (1 \cdot 1) \\ (0 \cdot 0) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 1) \\ (0 \cdot 0) + (0 \cdot 0) + (1 \cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$