

Výsledky příkladů

Cvičení 5

1. (a) Jedná se o geometrické rozdělení s parametrem $p = 1/6$, tedy

$$P[X = k] = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(b) $P[X < 6] = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$.

(c) $E X = 5$, $\text{Var}(X) = 30$.

(d) Pomocí Jensenovy nerovnosti nebo přímým výpočtem, který dává $E \frac{1}{1+X} = \frac{\ln 6}{5}$ a $\frac{1}{1+EX} = \frac{1}{6}$.

(e) $P[Y = k] = \binom{n-1+k}{k} \left(\frac{5}{6}\right)^k \left(\frac{1}{6}\right)^n, k = 0, 1, 2, \dots$

2. Označme Φ distribuční funkci normovaného normálního rozdělení. Potom $P[4,78 \leq X \leq 5,19] = \Phi(0,95) - \Phi(-1,1) = 0,693$.

3. (a) $\lambda = \frac{-\ln 0,7}{60} = 0,006$.

(b) Šikmost je 2, špičatost 9.

(c) pro $\lambda > 1$ je $E e^X = \frac{\lambda}{\lambda-1}$.

4. Z definice vyjádříme podmíněnou pravděpodobnost. Pak z toho, že $P[X > x + y, X > y] = P[X > x + y] = e^{-\lambda(x+y)}$ a $P[X > y] = e^{-\lambda y}$ již plyne tvrzení.

5. $E Y = \frac{11}{3}$, $\text{Var}(Y) = \frac{8}{9}$.

6. Náhodná veličina X je součtem tisíce nezávislých stejně rozdělených veličin s rovnoměrným rozdělením na množině $\{1, \dots, 6\}$, tedy $E X = 1000 \cdot \frac{21}{6} = 3500$, $\text{Var}(X) = 1000 \cdot \frac{35}{12}$. Pak z Čebyševovy nerovnosti plyne

$$P[3200 \leq X \leq 3800] = P[|X - E X| \leq 300] \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{300^2} \geq 0,967.$$

7. Z Čebyševovy nerovnosti je daná pravděpodobnost

$$P\left[|X - E X| \leq 2\sqrt{\text{Var}(X)}\right] \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{4\text{Var}(X)} = \frac{3}{4}.$$

8. (a) $P[X = k] = \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda}$, tedy X má Poissonovo rozdělení s parametrem $p\lambda$.

(b) Pro Poissonovo rozdělení platí $E X = p\lambda$.

(c) $P[N = n|X = k] = \frac{[(1-p)\lambda]^{n-k}}{(n-k)!} e^{-(1-p)\lambda}$.