

# Cvičení 6

## Téma: Laurentovy řady

Laurentova řada  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z-z_0)^m \dots a_m \in \mathbb{C}, z_0$  střed kruhu konvergence  
 $\text{Re}[0, \infty]$  poloměr kruhu konvergence

1) Naleznete koeficienty u mocnin  $(z-i)^{-10},$

$(z-i)^{-1}, (z-i)^1, (z-i)^2$  v Laurentově řadě

$$\sum_{m=-4}^{\infty} \frac{m+2}{2^m} (z-i)^{3m+8}$$

Řešení

$$\sum_{m=-4}^{\infty} \frac{m+2}{2^m} (z-i)^{3m+8} = \frac{-2}{2^{-4}} (z-i)^{-4} + \frac{-1}{2^{-3}} (z-i)^{-1} + 0 + \frac{1}{2^{-1}} (z-i)^5 + \dots$$

vyšší  
mocniny

$$a_{-10}=0, a_{-1}=-\frac{1}{2^{-3}}=-8, a_1=0, a_2=0$$

2) Rozviňte funkci  $f(z) = \frac{1}{z^3-z^2}$  do Laurentovy řady

a) na prstencovém okolí bodu  $z_0=1$

Řešení  $f(z) = \frac{1}{z^3-z^2} = \frac{1}{z^2(z-1)} = (z-1)^{-1} \cdot \frac{1}{z^2}$   $z \neq 1$

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2} \Rightarrow \frac{1}{z^2} = -\left(\frac{1}{z}\right)' = -\left(\frac{1}{1-(z-1)}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n\right)'$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (z-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n (z-1)^{n-1}, |-(z-1)| < 1 \Rightarrow |z-1| < 1$$

$$f(z) = (z-1)^{-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n (z-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n (z-1)^{n-2} = \sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^{k+1} (k+2) (z-1)^k$$

$k=n-2$   
 $k+2=n$   $z \in P(1; 0; 1)$

b) na okolí bodu  $z_0=\infty$

Řešení  $f(z) = z^{-2} \cdot \frac{1}{z-1}$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}, \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow 1 < |z|$$

$$f(z) = z^{-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-3} = \sum_{k=-\infty}^{-3} z^k, 1 < |z|$$

$-n-3=k$

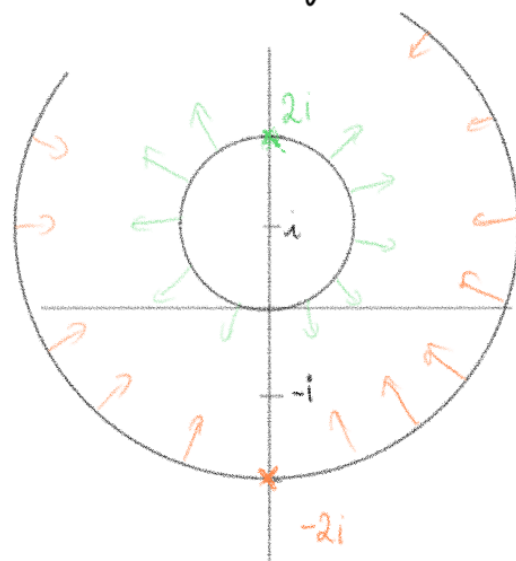
Poznámka: okolí bodu  $\infty$  je definováno jako  $\{z \in \mathbb{C}, |z| > \varepsilon\}, \varepsilon > 0$ .

3) Rozviňte funkci  $f(z) = \frac{z+i}{z^2+4}$  do Laurentovy řady na mezikruží se středem v bodě  $i$ , které obsahuje  $-i$ .

Řešení

$$f(z) = \frac{z+i}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{\frac{1}{4}}{z+2i} + \frac{\frac{3}{4}}{z-2i}$$

problematické body  $-2i$  a  $2i$ .



Zobrazku nahledneme, že

- První zlomek půjde rozvést na kruhu  $U(i, 3)$  nebo  $\mathbb{C} \setminus B(i, 3)$
- Druhý zlomek půjde rozvést na kruhu  $U(i, 1)$  nebo  $\mathbb{C} \setminus B(i, 1)$
- $-i \in U(i, 3) \cap (\mathbb{C} \setminus B(i, 1)) \Rightarrow$  první zlomek rozvieme u  $i$ , druhý u  $\infty$

$$\frac{1}{z+2i} = \frac{1}{3i+(z-i)} = \frac{1}{3i} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z-i}{3i}\right)} = \frac{1}{3i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3i)^n} (z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3i)^{n+1}} (z-i)^n, \quad \left| \frac{z-i}{3i} \right| < 1, |z-i| < |3i| = 3$$

$$\frac{1}{z-2i} = \frac{1}{(z-i)-i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{i}{z-i}} = (z-i)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(z-i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (z-i)^{-n-1}, \quad \left| \frac{i}{z-i} \right| < 1, 1=|i| < |z-i|$$

Dohromady pro  $1 < |z-i| < 3$ :

$$f(z) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3i)^{n+1}} (z-i)^n + \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (z-i)^{-n-1}, \quad z \in P(i, 1, 3).$$

Izolované singularity: mějme Laurentovu řadu  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

At'  $k = \inf \{n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0\}$

- $k \geq 0 \dots z_0$  je odstranitelná singularity
- $k < 0 \dots z_0$  je pól řádu  $-k$
- $k = -\infty \dots z_0$  je podstatná singularity

4) Určete typ izolované singularity funkce  $f$  v bodě  $z_0$ , kde

a)  $f(z) = \sum_{n=-5}^{\infty} \frac{n^2+5n}{2^n} (z-3i)^{2n}, z \in P(3i), z_0 = 3i$

Řešení

$$f(z) = \frac{25-25}{2^{-5}} (z-3i)^{-10} + \frac{16-20}{2^{-4}} (z-3i)^{-8} + \frac{9-15}{2^{-3}} (z-3i)^{-6} + \dots \text{vyšší mocniny}$$

$$= 0 - 64 (z-3i)^{-8} - 48 (z-3i)^{-6} + \dots \text{vyšší mocniny}$$

nejmenší mocnina s nenulovým koeficientem je  $-8 \Rightarrow$   $3i$  je pól řádu 8

b)  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^3 \frac{(-1)^n}{|n|!} z^{n+1}, z \in P(0), z_0 = 0$

Řešení

$$f(z) = \frac{-1}{6} z^4 + \frac{1}{2} z^3 + \frac{-1}{1} z^2 + z^1 + \frac{1}{1} z^0 + \frac{-1}{1} z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} + \dots \text{nižší mocniny s } a_n \neq 0$$

vždy můžeme najít nižší mocninu s nenulovým koeficientem  $\Rightarrow$  podstatná singularita

Izolované singularity podílů  $\frac{g}{h} \rightarrow m$ -násobný kořen  
 $\rightarrow n$ -násobný kořen

- $m \geq n \dots$  odstranitelná singularita
- $m < n \dots$  pól řádu  $n-m$

5) Vyšetřete všechny izolované singularity funkce  $f$

a)  $f(z) = \frac{z+i}{z^4+z^2+1}$

Řešení

$$f(z) = \frac{z+i}{z^4+z^2+1} = \frac{z+i}{(z^2+1)^2} = \frac{z+i}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

iz.s.  $-i, i$

$i \dots$  0-násobný kořen čitatele  
2-násobný kořen jmenovatele } pól řádu 2 ( $=2-0$ )

$-i \dots$  1-násobný kořen čitatele  
2-násobný kořen jmenovatele } pól řádu 1 ( $=2-1$ )

b)  $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^5(1-e^{iz})}$

Řešení

$$1-e^{iz}=0$$

$$e^{iz}=1=e^0 \Leftrightarrow iz=2\pi i k \Rightarrow z=2k\pi$$

iz.s.  $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  (včetně nuly)

násobnosti kořenů:

$$1-\cos z \big|_{z=2k\pi} = 1-1=0$$

$$(1-\cos z)' \big|_{z=2k\pi} = +\sin z \big|_{z=2k\pi} = 0$$

$$(1-\cos z)'' \big|_{z=2k\pi} = \cos z \big|_{z=2k\pi} = 1 \neq 0$$

} 2-násobné kořeny

$$1-e^{iz} \big|_{z=2k\pi} = 0$$

$$(1-e^{iz})' \big|_{z=2k\pi} = -ie^{iz} \big|_{z=2k\pi} = -i \neq 0$$

} 1-násobné kořeny

•  $2k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ :

2-násobné kořeny čitatele

1-násobné kořeny jmenovatele

} odstranitelné singularity ( $2 \geq 1$ )

• 0: 2-násobný kořen čitatele

$(5+1)=6$ -násobný kořen jmenovatele

} pól řádu 4 ( $=6-2$ )

Reziduum: mějme Laurentovu řadu  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z-z_0)^m$

Pak  $\text{res}_{z_0} f(z_0) = a_{-1}$ .

6) Určete reziduum funkce  $f$  v bodě  $z_0$

a)  $f(z) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{3^{n-2}} (z+1)^{n-7}, z \in P(-1), z_0 = -1$

Řešení: buď dosazujeme, nebo najdeme rovnou  $n: n-7=-1$

$$f(z) = \frac{9}{3} (z+1)^{-4} + \frac{16}{9} (z+1)^{-3} + \frac{25}{27} (z+1)^{-2} + \frac{36}{81} (z+1)^{-1} + \dots \text{nezáporné mocniny}$$

$$a_{-1} = \frac{36}{81} = \text{res}_{-1} f$$

b)  $f(z) = \sum_{n=-10}^{\infty} \frac{n+2}{2^n} z^{n^2-n-3}, z \in P(0), z_0 = 0$

Řešení: rovnou hledáme správné  $n$

$$n^2 - n - 3 = -1$$

$$n^2 - n - 2 = 0$$

$$(n-2)(n+1) = 0$$

$$n_1 = -1$$

$$n_2 = 2$$

$$f(z) = \dots + \frac{-1+2}{2^{-1}} z^{-1} + \dots + \frac{2+2}{2^2} z^{-1} + \dots$$

$$a_{-1} = \frac{-1+2}{2^{-1}} + \frac{2+2}{2^2} = 2 + 1 = 3$$

$$\text{res}_0 f(z) = 3$$

Vzorce pro reziduum

• pól řádu  $k$ :  $\text{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ (z-z_0)^k f(z) \right]^{(k-1)}$

• funkce typu  $\frac{g}{h} \rightarrow \begin{matrix} g \rightarrow \text{holomorfní} \\ h \rightarrow 1\text{-násobný kořen} \end{matrix}$  :  $\text{res}_{z_0} \frac{g}{h} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

7) Vyšetřete všechny izolované singularity  $f$  a spočítejte rezidua.

a)  $f(z) = \frac{z+1}{z^4+z^3-2z^2}$

Řešení

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2(z^2+z-2)} = \frac{z+1}{z^2(z+2)(z-1)}$$

i.z.s.  $0, -2, 1$

$0 \dots$  pól řádu 2 ( $=2-0$ )  $\rightarrow$  vzorec pro pól řádu 2

$-2, 1 \dots$  póly řádu 1 ( $=1-0$ ) a také 1-násobné kořeny jmenovatele

•  $\text{res}_0 f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \left[ z^2 \frac{z+1}{z^2(z+2)(z-1)} \right]' = 1 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2+z-2-(z+1)(2z+1)}{(z^2+z-2)^2}$

$$= \frac{-2-1 \cdot 1}{(-2)^2} = -\frac{3}{4}$$

•  $\text{res}_{-2} f(z) = \frac{1}{(1-1)!} \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \frac{z+1}{z^2(z+2)(z-1)} = 1 \cdot \frac{-2+1}{(-2)^2 \cdot (-3)} = \frac{1}{12}$

•  $\text{res}_1 f(z) = \text{res}_1 \frac{z+1}{z^2(z+2)} = \frac{z+1}{z^2(z+2)} \Big|_{z=1} = \frac{2}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

$$b) f(z) = \frac{z+1}{1-e^{2\pi iz}}$$

Řešení

$$1 - e^{2\pi iz} = 0$$

$$e^{2\pi iz} = 1 = e^0 \Leftrightarrow 2\pi iz = 2k\pi i \Leftrightarrow z = k \in \mathbb{Z}$$

i.z.s.  $k \in \mathbb{Z}$  (včetně -1)

$$1 - e^{2\pi iz} \Big|_{z=k} = 0$$

$$(1 - e^{2\pi iz})' \Big|_{z=k} = -2\pi i e^{2\pi iz} \Big|_{z=k} = -2\pi i \neq 0 \quad \left. \vphantom{\frac{1 - e^{2\pi iz}}{(1 - e^{2\pi iz})'}} \right\} \begin{array}{l} 1\text{-násobné kořeny jmenovatele} \\ 1\text{-násobné kořeny čitatele} \end{array}$$

•  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ :  $\left. \begin{array}{l} 0\text{-násobné kořeny čitatele} \\ 1\text{-násobné kořeny jmenovatele} \end{array} \right\}$  pól řádu 1

-1:  $\left. \begin{array}{l} 1\text{-násobný kořen čitatele} \\ 1\text{-násobný kořen jmenovatele} \end{array} \right\}$  odstranitelná singularita

$\Rightarrow \text{res}_{-1} f = 0$  (rovnou díky znalosti, že jde o odstranitelnou singularitu)

$$\text{res}_k \frac{z+1}{1-e^{2\pi iz}} = \frac{z+1 \Big|_{z=k}}{(1-e^{2\pi iz})' \Big|_{z=k}} = \frac{k+1}{-2\pi i}$$

$$c) f(z) = \frac{\sin^2 z}{z(2\pi - z)^3}$$

Řešení

i.z.s.  $0, 2\pi$

$$\sin z \Big|_{z=0, 2\pi} = 0$$

$$(\sin z)' \Big|_{z=0, 2\pi} = \cos z \Big|_{z=0, 2\pi} = 1 \neq 0 \quad \left. \vphantom{\frac{\sin z}{(\sin z)'}} \right\} 1\text{-násobné kořeny sinu}$$

0:  $\left. \begin{array}{l} (2-1)2\text{-násobný kořen čitatele} \\ 1\text{-násobný kořen jmenovatele} \end{array} \right\}$  odstranitelná singularita ( $2 \geq 1$ )  
 $\Rightarrow \text{res}_0 f = 0$

$2\pi$ :  $\left. \begin{array}{l} 2\text{-násobný kořen čitatele} \\ 3\text{-násobný kořen jmenovatele} \end{array} \right\}$  pól řádu 1 ( $= 3-2$ )

$$\text{res}_{2\pi} f(z) = \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow 2\pi} \frac{(z-2\pi) \cdot \sin^2 z}{(-1) \cdot z \cdot (2\pi - z)^3} = \lim_{z \rightarrow 2\pi} \frac{-1}{z} \cdot \left( \frac{\sin z}{2\pi - z} \right)^2 \stackrel{\text{vonL}}{=} \frac{-1}{2\pi} (-1)^2 = -\frac{1}{2\pi}$$

$$\lim_{z \rightarrow 2\pi} \frac{\sin z}{2\pi - z} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{z \rightarrow 2\pi} \frac{\cos z}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

8) Naleznete hlavní část Laurentovy řady funkce  $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^5}$

na prstencovém okolí bodu 0 a určete  $\text{res}_0 f(z)$ .

Řešení

$$\begin{aligned} \frac{z - \sin z}{z^5} &= \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} \sin z = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \frac{1}{z^4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-4} \\ &= \cancel{z^{-4}} - \left( \cancel{\frac{1}{1!} z^{-4}} + \frac{-1}{3!} z^{-2} + \frac{1}{5!} z^0 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-4} \right) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{6} z^{-2}}_{\text{hlavní část}} + \underbrace{\frac{1}{120} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-4}}_{\text{regulární část}}, \quad z \in P(0, 0, \infty) \end{aligned}$$

$$\text{res}_0 f(z) = a_{-1} = 0$$

Poznámka: pro póly vysokých řádů může být výhodnější použít rozvoj namísto vzorce pro výpočet residua.

9) Je dána funkce  $f(z) = \frac{z+1}{z(1-z)^2}$ . Naleznete rozvoj do Laurentovy řady na maximálním prstencovém okolí bodu 0. Dále klasifikujte všechny izolované singularity funkcí  $g(z) = \frac{1}{z^{20}} \cdot f(z)$  a  $h(z) = \frac{1}{z^{20}} + f(z)$  a určete  $\text{res}_0 g(z)$  a  $\text{res}_0 h(z)$ .

$$\text{Řešení} \quad f(z) = \frac{z}{z(1-z)^2} + \frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(1-z)^2} \quad z \neq 0$$

$$\left( \frac{1}{1-z} \right)' = \frac{1}{(1-z)^2} \Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \quad |z| < 1$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} + \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-2} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k + \sum_{k=-1}^{\infty} (k+2) z^k = z^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+3) z^k, \quad z \in P(0, 0, 1) \end{aligned}$$

$$g(z) = \frac{z+1}{z^{21}(1-z)^2} = z^{-21} + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+3) z^{k-20} \quad \begin{aligned} k-20 &= -1 \\ k &= 19 \rightarrow (2k+3) = 2 \cdot 19 + 3 = 41 \end{aligned}$$

i.z.s.  $\left. \begin{array}{l} 0 \dots \text{pól řádu } 21 \\ 1 \dots \text{pól řádu } 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{nejsou} \\ \text{kořeny} \\ \text{čitatele} \end{array}$

$$\text{res}_0 g(z) = a_{-1} = 41$$

$$h(z) = \frac{1}{z^{20}} + \frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{(1-z)^2 + z^{19}}{z^{20}(1-z)^2} = z^{-20} + z^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+3) z^k$$

i.z.s.  $\left. \begin{array}{l} 0 \dots \text{pól řádu } 20 \\ 1 \dots \text{pól řádu } 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{nejsou} \\ \text{kořeny} \\ \text{čitatele} \end{array}$

$$\text{res}_0 h(z) = a_{-1} = 1$$