Cvičení 2

Téma: Komplexní funkce, Cauchyovy-Riemannovy podmínky, harmonicky sdružené funkce

Opakování: $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ … reálná část funkce f

$v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ … imaginární část funkce f

1) Nalezněte reálnou a imaginární část funkce $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$.
Funkci interpretujte geometricky a nalezněte obraz přímky $\operatorname{Im} z = 2$.

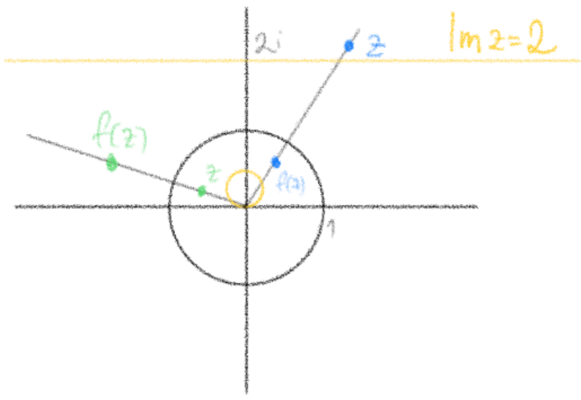
Řešení

$$f(z) = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{\overline{(x+iy)}} = \frac{1}{x-iy}\cdot\frac{x+iy}{x+iy} = \underbrace{\frac{x+iy}{x^2+y^2}}_{=\frac{z}{|z|^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{|z|e^{i\varphi}}{|z|^2} = \frac{e^{i\varphi}}{|z|}$$

↳ obraz zůstává se stejným úhlem ale velikostí $\frac{1}{|z|}$



Obraz $\operatorname{Im} z = 2$ je kružnice se středem $\frac{1}{4}i$ a poloměrem $\frac{1}{4}$ bez bodu 0.

Funkce f se nazývá kruhová inverze.

2) Nalezněte reálnou a imaginární část funkce $f(z) = \dfrac{2z^2+3}{|z-1|}$
a rozhodněte, zda $i \in M = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} f(z) \geq 0,\ \operatorname{Im} f(z) = 0\}$.

Řešení

$$f(z) = \frac{2z^2+3}{|z-1|} = \frac{2(x+iy)^2+3}{|x+iy-1|} = \frac{2(x^2+2ixy-y^2)+3}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \frac{2x^2-2y^2+3}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + i\,\frac{4xy}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$$

$$u(x,y) = \frac{2x^2-2y^2+3}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}, \quad v(x,y) = \frac{4xy}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$$

$i = 0 + i1$ … v $\mathbb{R}^2$ odpovídá bodu $(0,1)$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re} f(i) &= u(0,1) = \frac{0-2+3}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \ \checkmark \\ \operatorname{Im} f(i) &= v(0,1) = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \ \checkmark \end{aligned}\right\} \Rightarrow i \in M.$$

3) Nalezněte všechny body, ve kterých je $f(z) = \mathrm{Re}(z^2) - i\,\mathrm{Im}(z^2)$ diferencovatelná a v nich určete $f'(z)$.

Existuje-li derivace $f'(z_0)$, pak jsou splněny Cauchyovy-Riemannovy podmínky
CR1 $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$
CR2 $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$.
Jsou-li parciální derivace u a v spojité, platí i opačná implikace. Navíc $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$.

Řešení $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$f(z) = \mathrm{Re}(z^2) - i\,\mathrm{Im}(z^2) = x^2 - y^2 - i2xy$

$u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = -2xy$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x$

Ověříme Cauchyovy-Riemannovy podmínky

CR1 $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$
$2x = -2x$
$x = 0$

CR2 $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$
$-2y = -(-2y)$
$y = 0$

Parciální derivace u a v jsou spojité (dokonce na $\mathbb{R}^2$) a Cauchyovy-Riemannovy podmínky platí v bodě $(0,0)$

$\Rightarrow f$ je v 0 diferencovatelná a $f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0$

4) Nalezněte všechny hodnoty parametrů α, β tak, aby funkce $f(z) = x(x^2 - \alpha y^2) + iy(\beta x^2 - y^2)$ byla a) diferencovatelná na $\mathrm{Im}\, z = 0$,
b) celistvá.

Řešení

$u(x,y) = x(x^2 - \alpha y^2)$, $v(x,y) = y(\beta x^2 - y^2)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - \alpha y^2$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2\beta xy$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2\alpha xy$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \beta x^2 - 3y^2$

Ověříme Cauchyovy-Riemannovy podmínky

CR1 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$
$3x^2 - \alpha y^2 = \beta x^2 - 3y^2$
$x^2(3-\beta) = y^2(\alpha - 3)$

CR2 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$
$-2\alpha xy = -2\beta xy$
$\alpha xy = \beta xy$

a) Diferencovatelnost na $\mathrm{Im}\, z = 0 \Rightarrow y = 0, x \in \mathbb{R}$

CR1 $\forall x \in \mathbb{R}$: $x^2(3-\beta) = 0 \iff \beta = 3$
CR2 $0 = 0$ ✓

Vyhovující parametry jsou $\alpha \in \mathbb{R}, \beta = 3$.

b) Diferencovatelnost na $\mathbb{C} \Rightarrow x, y \in \mathbb{R}$

$\underline{CR1|}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}: \; x^2(3-\beta) = y^2(\alpha-3) \iff 3-\beta=0, \alpha-3=0 \iff \alpha=\beta=3$

$\underline{CR2|}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}: \; 3xy = 3xy$ ✓ Vyhovující parametry jsou $\alpha=\beta=3$.

5) Naleznete celistvou funkci f tak, aby její reálná část byla $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2xy$ a platilo $f(0) = 2i$.

Řešení

Hledáme $v(x,y)$ tak aby $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ a $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2 + 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -12x^2y + 4y^3 + 2x$$

$$v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y}\, dy = \int (4x^3 - 12xy^2 + 2y)\, dy = 4x^3y - \frac{12}{3}xy^3 + \frac{2}{2}y^2 + c(x)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial x} = 12x^2y - 4y^3 + c'(x) \\ &\text{zároveň chceme} \\ &\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 12x^2y - 4y^3 - 2x \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &c'(x) = -2x \\ &c(x) = \int(-2x)\,dx = -\frac{2}{2}x^2 + c = -x^2 + c, \; c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dostáváme všechny možné harmonicky sdružené funkce $v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + y^2 - x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$, a tedy všechny celistvé

$$f(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2xy + i\left(4x^3y - 4xy^3 + y^2 - x^2 + c\right).$$

Nalezneme c k požadované podmínce $2i = f(0) = 0 + ic \Rightarrow c = 2$.

6) Určete hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce $u(x,y) = e^y \sin \alpha x + 3xy + x$ byla harmonická a pro kladnou hodnotu α naleznete harmonicky sdruženou funkci $v(x,y)$.

Řešení

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha e^y \cos \alpha x + 3y + 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = e^y \sin \alpha x + 3x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\alpha^2 e^y \sin \alpha x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y \sin \alpha x$$

Funkce u je harmonická, pokud $\forall x, y \in \mathbb{R}: \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$.

$$-\alpha^2 e^y \sin \alpha x + e^y \sin \alpha x = e^y \sin \alpha x (1 - \alpha^2) = 0 \iff \alpha = \begin{cases} 0 \\ -1 \\ 1 \end{cases}$$

Pro $\underline{\alpha=1}$ nalezneme $v(x,y)$ takovou, že $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ a $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$v(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial y}\,dy=\int\left(e^y\cos x+3y+1\right)dy=e^y\cos x+\frac{3}{2}y^2+y+c(x)$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial v}{\partial x}=-e^y\sin x+c'(x)\\ \text{Také víme}\\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-e^y\sin x-3x\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}c'(x)=-3x\\ c(x)=\int 3x\,dx=\frac{3}{2}x^2+c,\ c\in\mathbb{R}.\end{array}$$

Všechny vyhovující funkce jsou $v(x,y)=e^y\cos x+\frac{3}{2}y^2+y+\frac{3}{2}x^2+c,\ c\in\mathbb{R}$,

a $f(x,y)=e^y\sin x+3xy+x+i\left(e^y\cos x+\frac{3}{2}y^2+y+\frac{3}{2}x^2+c\right),\ c\in\mathbb{R}$, jsou celistvé.