

Cvičení – Komplexní analýza 2025/2026

Cvičení 7 a 8

Úloha 1. Spočtěte.

(a) $\operatorname{res}_\pi \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$

(b) $\operatorname{res}_0 \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$

(c) $\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz}}{\sin(2z)}$

(d) $\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{e^z - 1 - z}$

(e) $\operatorname{res}_0 \frac{z^2}{1 - \cos z}$

Úloha 2. Spočtěte.

(a)

$$\int_C \frac{z}{(z+2)(z-5)^2} dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z-4|=2$.

(b)

$$\int_C \frac{1}{z \sin z} + \frac{e^{\sin z}}{z+3} dz,$$

kde C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka s vrcholy -2 , $\frac{3\pi}{2} + 2i$, $\frac{3\pi}{2} - 2i$.

(c)

$$\int_C \frac{1}{e^z - 1} + \frac{z - \frac{\pi}{2}}{(\cos z)^2} dz,$$

kde C je kladně orientovaná hranice obdélníka s vrcholy $\frac{\pi}{4} + i$, $\frac{\pi}{4} - i$, $\pi + i$, $\pi - i$.

(d)

$$\int_C e^{\frac{4}{z-2}} + \sin\left(\frac{1}{z-10}\right) dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z-1|=3$.

Úloha 3. Určete, čemu se rovná

$$\int_C \frac{2}{(z+3)^5} + \frac{3}{z-3} + \frac{4}{z+3} dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z+1|=3$.

Úloha 4. Spočtěte.

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 25} dx$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3ix}}{(x^2-2x+2)^2} dx$

Reziduum

Připomenutí.

- (1) Necht $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ je Laurentův rozvoj funkce f na prstencovém okolí izolované singularity $z_0 \in \mathbb{C}$. Koeficient a_{-1} (tj. koeficient u $(z - z_0)^{-1}$) nazýváme **reziduem** funkce f v bodě z_0 a značíme $\text{res}_{z_0} f(z) = a_{-1}$.
- (2) Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj (na správném prstencovém okolí!), vyčteme reziduum z rozvoje.
- (3) Pokud ne, často se hodí následující pravidla pro výčet reziduí.
 - Má-li $f(z)$ v bodě z_0 **pól řádu** $k \in \mathbb{N}$, potom

$$\text{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^k f(z)]^{(k-1)}.$$

Speciálně pro

- ★ $k = 1$: $\text{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$;
- ★ $k = 2$: $\text{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^2 f(z))'$.

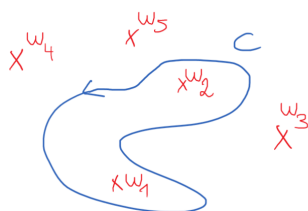
- Je-li funkce f tvaru $f = \frac{g}{h}$, kde g je holomorfní na okolí z_0 a h má v bodě z_0 **jednonásobný kořen**, potom

$$\text{res}_{z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

- Reziduum v izolované singularitě je vždy dobře definované komplexní číslo. Tvrdit, že reziduum „neexistuje“, nebo je „nekonečné“ nedává žádný smysl. . .

Reziduová věta

Připomenutí.



$$\int_C f(z) dz = 2\pi i (\text{res}_{w_1} f(z) + \text{res}_{w_2} f(z))$$

$$\text{Integrály typu } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \text{ a } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx$$

Připomenutí.

- Necht P, Q jsou nenulové polynomy, $\alpha \in \mathbb{R}$. Necht $\text{st } Q \geq \text{st } P + 1$ (pokud $\alpha = 0$, tak $\text{st } Q \geq \text{st } P + 2$) a Q nemá žádné reálné kořeny. Potom

(a) **pokud $\alpha \geq 0$** , pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$

kde

$$S_+ = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \text{Im } z > 0\};$$

(b) **pokud $\alpha < 0$** , pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = -2\pi i \sum_{w \in S_-} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$

kde

$$S_- = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \text{Im } z < 0\}.$$

Výsledky

- Úloha 1: (a) $\frac{1}{\pi^2}$
(b) $\frac{1}{\pi^2}$
(c) $-\frac{i}{2}$
(d) 2
(e) 0

- Úloha 2: (a) $\frac{4}{49}\pi i$
(b) $-2i$
(c) $2\pi i$
(d) $8\pi i$

- Úloha 3: $8\pi i$

- Úloha 4: (a) $\frac{\pi}{4}$
(b) $\frac{\pi}{6}$
(c) $\left(\frac{e^{-2}}{8} - \frac{e^{-6}}{24}\right)\pi$
(d) $2e^{-3+3i}\pi = 2e^{-3}(\cos 3 + i \sin 3)\pi$