Kapitola 11

Matice jako lineární zobrazení

V této kapitole budeme pracovat nad obecným tělesem $\mathbf{T}$.

Definice 11.1 *Buď* $\mathbf{A}$ *matice typu* $m \times n$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$. *Zobrazení* $A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ *definované předpisem* $A(\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x})$ *nazýváme* lineární zobrazení určené maticí $\mathbf{A}$.

Tvrzení 11.1 *Je-li* $A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ *lineární zobrazení určené maticí* $\mathbf{A}$, *pak platí*

1. $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$ *pro každé* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{T}^n$,
2. $A(a\mathbf{x}) = a \cdot A(\mathbf{x})$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ *a každý skalár* $a \in \mathbf{T}$.

Definice 11.2 *Libovolné zobrazení* $A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ *splňující podmínky 1,2 Tvrzení 11.1 nazýváme* lineární zobrazení.

Tvrzení 11.2 *Každé lineární zobrazení* $A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ *je určené nějakou maticí.*

Tvrzení 11.3 *Buď* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *báze* $\mathbf{T}^n$ *a* $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$. *Jsou-li* $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i$ *a* $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{u}_i$ *dvě vyjádření* $\mathbf{x}$ *jako lineární kombinace prvků báze* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, *pak* $a_i = b_i$ *pro každé* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definice 11.3 *Je-li* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *báze* $\mathbf{T}^n$ *a* $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i$, *pak aritmetický vektor* $(a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbf{T}^n$ *nazýváme* vektor souřadnic *vektoru* $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, *nebo stručněji* souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$.

Poznámka Je-li $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{T}^n$, pak $x_1, \ldots, x_n$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem ke standardní bázi $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, neboť $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$. V další části přednášky už nebudeme standardní bázi tolik upřednostňovat a budeme se zabývat souřadnicemi vektorů vzhledem k obecným bázím.

Tvrzení 11.4 *Předpokládejme, že $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ a $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ jsou dvě báze prostoru $\mathbf{T}^n$. Nechť pro nějaký vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$ platí*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{v}_i,$$

tj. $a_1, \ldots, a_n$ jsou souřadnice $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ a $b_1, \ldots, b_n$ jsou souřadnice téhož vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

Nechť

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \mathbf{u}_i$$

pro každé $j = 1, \ldots, n$. Označme $\mathbf{P} = (p_{ij})$. Potom platí

$$(a_1, \ldots, a_n)^T = \mathbf{P}(b_1, \ldots, b_n)^T.$$

Definice 11.4 *Jsou-li $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ a $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ jsou dvě báze prostoru $\mathbf{T}^n$ a $\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \mathbf{u}_i$, pak matici (p_{ij}) nazýváme* matice přechodu od báze *$\mathcal{V}$ k bázi $\mathcal{U}$.*

Tvrzení 11.5 *Nechť $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ a $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ jsou tři báze prostoru $\mathbf{T}^n$, $\mathbf{P}$ je matice přechodu od báze $\mathcal{V}$ k bázi $\mathcal{U}$ a $\mathbf{Q}$ je matice přechodu od báze $\mathcal{W}$ k bázi $\mathcal{V}$, pak $\mathbf{PQ}$ je matice přechodu od báze $\mathcal{W}$ k bázi $\mathcal{V}$.*

Tvrzení 11.6 *Matice přechodu $\mathbf{P}$ od báze $\mathcal{V}$ k bázi $\mathcal{U}$ je regulární. Inverzní matice $\mathbf{P}^{-1}$ je matice přechodu od báze $\mathcal{U}$ k bázi $\mathcal{V}$.*

Definice 11.5 *Matice lineárního zobrazení $A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ vzhledem k bázi $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ v $\mathbf{T}^n$ a bázi $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ v $\mathbf{T}^m$ je r_{ij}, kde $A(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^m r_{ij} \mathbf{v}_i$. Matice lineárního zobrazení $A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ vzhledem k bázi $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$.*

Poznámka. Je-li $A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ určené maticí $\mathbf{A}$, pak $\mathbf{A}$ je matice A vzhledem ke standardním bázím v obou prostorech.

Tvrzení 11.7 *Jsou-li* $A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ *a* $B : \mathbf{T}^m \to \mathbf{T}^p$ *lineární zobrazení, je-li* $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *báze v* $\mathbf{T}^n$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *báze v* $\mathbf{T}^m$, $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p\}$ *v* $\mathbf{T}^p$, $\mathbf{Q} = (q_{jk})$ *matice lineárního zobrazení* A *vzhledem k bázím* $\mathcal{U}$ *a* $\mathcal{V}$ *a* $\mathbf{P} = (p_{ij})$ *matice* B *vzhledem k bázím* $\mathcal{V}$ *a* $\mathcal{W}$, *pak součin* $\mathbf{PQ}$ *je matice lineárního zobrazení* $BA : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^p$ *vzhledem k bázím* $\mathcal{U}$ *a* $\mathcal{W}$.

Tvrzení 11.8 *Matice přechodu od* $\mathcal{V}$ *k* $\mathcal{U}$ *je matice identického zobrazení* $I : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ *vzhledem k bázím* $\mathcal{V}$ *a* $\mathcal{U}$.

Tvrzení 11.9 *Je-li* $\mathbf{A}_{\mathcal{U}}$ *matice* $A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n$ *vzhledem k bázi* $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, $\mathbf{A}_{\mathcal{V}}$ *matice* A *vzhledem k bázi* $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *a* $\mathbf{P}$ *matice přechodu od báze* $\mathcal{V}$ *k bázi* $\mathbf{A}_{\mathcal{U}}$, *pak* $\mathbf{A}_{\mathcal{V}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_{\mathcal{U}}\mathbf{P}$.