1. Najděte všechny ireducibilní polynomy stupně nejvýše čtyři v $\mathbb{Z}_3[x]$.

   Řešení. Nejprve poznamenejme, že pokud je f ireducibilní v $\mathbb{Z}_3[x]$, tak je ireducibilní i 2, neboť dvojka je v $\mathbb{Z}_3[x]$ invertibilní. Stačí proto najít všechny monické ireducibilní polynomy do stupně čtyři a konstatovat, že dvojnásobek každého z nich je také ireducibilní. Dále postupujeme podle stupně.

   - stupeň 0:
     Všechny nenulové prvky $\mathbb{Z}_3$ jsou invertibilní, tedy žádný není ireducibilní.
   - stupeň 1:
     Všechny jsou ireducibilní: x, $x+1$, $x+2$.
   - stupeň 2:
     Pokud polynom f stupně dva není ireducibilní, znamená to, že se rozkládá na dva polynomy stupně jedna, tj. $f(x) = (x+a)(x+b)$, kde $a, b \in \mathbb{Z}_3$ a $-a, -b$ jsou kořeny. Jinými slovy, polynom stupně dva je ireducibilní, právě když nemá kořen:
     $$x^2+1,\ x^2+2x+1,\ x^2+2x+2$$
   - stupeň 3:
     Stejně jako u polynomů stupně dva platí, že polynom stupně tři je ireducibilní, právě když nemá kořen:
     $$x^3+2x^2+1,\ x^3+2x^2+x+1,\ x^3+2x+1,\ x^3+x^2+2x+1,\ x^3+x^2+2,$$
     $$x^3+x^2+x+2,\ x^3+2x+2,\ x^3+2x^2+2x+2$$
   - stupeň 4:
     Polynomy stupně čtyři jsou ireducibilní, právě když nemají kořen nebo nejsou součinem dvou ireducibilních polynomů stupně dva.
     $$x^4+2x^3+x+1,\ x^4+x^2+x+1,\ x^4+x^3+x^2+x+1,\ x^4+x+2,$$
     $$x^4+2x^3+x^2+x+2,\ x^4+2x^3+x^2+x+2,\ x^4+x^3+2x+1,$$
     $$x^4+x^2+2x+1,\ x^4+2x^3+x^2+2x+1,\ x^4+2x+2,\ x^4+x^3+x^2+2x+2,$$
     $$x^4+x^3+2x^2+2x+2,\ x^4+x^3+x^2+1,\ x^4+2x^3+x^2+1,\ x^4+x^3+2,$$
     $$x^4+2x^3+2,\ x^4+x^2+2,\ x^4+2x^2+2$$

2. Pro které hodnoty $a \in \mathbb{Z}_5$ je polynom x^3+ax+1 ireducibilní v $\mathbb{Z}_5[x]$?

Řešení. Stejně jako v předchozím příkladu vidíme, že polynom stupně tři je v $\mathbb{Z}_5[x]$ ireducibilní, právě když nemá kořen v $\mathbb{Z}_5$. Parametr a může nabývat pěti různých hodnot, provedeme rozbor případů:

- $a = 0$: $x^3 + 1$ má kořen -1, tedy není ireducibilní
- $a = 1$: $x^3 + x + 1$ nemá kořen v $\mathbb{Z}_5$, tedy je ireducibilní
- $a = 2$: $x^3 + 2x + 1$ nemá kořen v $\mathbb{Z}_5$, tedy je ireducibilní
- $a = -2$: $x^3 - 2x + 1$ má kořen 1, tedy není ireducibilní
- $a = -1$: $x^3 - x + 1$ má kořen -2, tedy není ireducibilní

Polynom $x^3 + ax + 1$ je ireducibilní v $\mathbb{Z}_5[x]$, právě když $a \in \{1,\ 2\}$.

3. Rozložte polynom $3x^3 + 81$ na součin ireducibilních prvků v $\mathbb{Z}[x]$.

   Řešení. Po vytknutí trojky dostaneme polynom $x^3 + 27$. Všimneme si, že tento polynom má kořen -3 a po vydělení $x + 3$ dostaneme rozklad:

$$3\,(x+3)\left(x^2 - 3x + 9\right)$$

   Všechny prvky tohoto rozkladu jsou ireducibilní, neboť

   - 3 není invertibilní v $\mathbb{Z}[x]$, tedy je to ireducibilní prvek
   - $x + 3$ zřejmě nejde dále rozkládat
   - $x^2 - 3x + 9$ nemá v $\mathbb{Z}$ kořen, tedy je ireducibilní

4. Spočtěte $(2 - x)^{-1}$ v $\mathbb{Q}[[x]]$.

   Řešení. Označme $(2-x)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Chceme, aby platilo

$$\begin{aligned} 1 &= (2 - x) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} 2a_i x^i - \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1} \\ &= 2a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(2a_i - a_{i-1}\right) x^i \end{aligned}$$

   To nám dává soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2a_0 &= 1 \\ 2a_i - a_{i-1} &= 0 \end{aligned}$$

   pro všechna $i = 1, 2, \ldots$ Řešením je $a_i = (\frac{1}{2})^{i+1}$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots$, odpovědí tedy je řada $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} x^i$.