Domácí úlohy 1.

odevzdat do 25.2. 9:00

1. Vypište všechny podalgebry algebry $\mathbf{A} = (\{1, 2, 3, a, b, c\}, f)$ typu (1), kde $f(a) = f(1) = 2$, $f(b) = f(2) = 3$, $f(c) = f(3) = 1$. Nakreslete uspořádanou množinu podalgeber, s uspořádáním inkluze nosných množin.

2. Buď $\mathbf{A} = (A, *)$ algebra typu (2). Ověřte, že množina

$$\{a \in A : (x * a) * y = x * (a * y) \text{ pro všechna } x, y \in A\}$$

je buď prázdná, nebo tvoří podalgebru algebry $\mathbf{A}$. Uveďte příklad algebry, ve které je tato množina prázdná.

3. Buď $\mathbf{T}_3 = (T_3, \circ)$ algebra všech zobrazení na množině $\{1, 2, 3\}$ s operací skládání zobrazení. Ověřte, že $\mathbf{T}_3 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, a dokažte, že tato algebra není generována žádnou dvouprvkovou množinou.

4. Najděte minimální množinu generátorů algebry $(\mathbb{N}, +) \times (\mathbb{N}, +)$ (minimální vzhledem k inkluzi). Dokažte, že neexistuje konečná množina generátorů této algebry. (Rozumí se $0 \notin \mathbb{N}$.)

5. Napište, jak vypadají operace algebry $\mathbf{A} = (\mathbb{Z}, +, \cdot) \times (\mathbb{Z}, \cdot, +)$. Spočtěte $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle_{\mathbf{A}}$.