$7n \equiv 10^{42} \pmod{88}$

$88 = 8 \cdot 11$

$10^{42} = 2^{42} \cdot 5^{42} \equiv 8k \pmod{88}$

$2^{39} \cdot 5^{42} \equiv k \pmod{11}$

$NSD(2,11) = NSN(5,11) = 1$
$\varphi(11) = 10$, použijeme Eulerovu větu:

$2^{39} \equiv 2^{9}$, což je jako $2^{-1} \sim \mathbb{Z}_{11}$
čili $\equiv 6$

$5^{42} \equiv 5^{2} \equiv 3$

$\Rightarrow \quad k \equiv 3 \cdot 6 \equiv 7 \pmod{11}$

$10^{42} \equiv 56 \pmod{88}$

$7n \equiv 56 \pmod{88}$ → krátím 7, je nesoud. s 88

$n \equiv 8 \pmod{88}$

Druhé nejmenší je $\boxed{96}$.

$\nu(\pm 29) = 29^2$ v obou oborech

$\Rightarrow$ otázka zní: existuje prvek normy 29?

$\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$: $\nu(a+b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2$

$b = 1, 2, 3 \ldots a \notin \mathbb{Z}$
$b \geq 4 \ldots$ víc než 29

$\Rightarrow$ 29 je ireducibilní v $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

$\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$: $\nu(a+b\sqrt{7}) = a^2 - 7b^2$

☺ vyhovuje $a=6, b=1$

$\Rightarrow \quad 29 = (6+\sqrt{7})(6-\sqrt{7})$

tato čísla jsou ireducibilní, neboť mají prvočíselnou normu

$x^4 + \alpha x^3 + \alpha x + (\alpha+1)$

$=$

$(x+\alpha) \cdot (x^3+\alpha)$

protože $\alpha^2 \equiv \alpha + 1 \pmod{\alpha^3+\alpha+}$

Činitel $x+\alpha$ je ired. zřejm

Činitel $x^3+\alpha$ je ired. pokud nemá kořen, protože je stupně 3.

Ověříme $0^3 = 0$

$1^3 = \alpha^3 = (\alpha+1)^3 =$

Čili součet s α nedá 0.

$f(2)=5$ & $xf \equiv 2 \pmod{x^3+1}$ $\cdot x^2$

$x^3 f \equiv 2x^2 \pmod{x^3+1}$ $x^3 \equiv -1$

$f \equiv -2x^2 \pmod{x^3+1}$

čili $f = g\cdot(x^3+1) - 2x^2$

→ dosad': $f(2) = g(2)\cdot 2 - 8 = 5$

(?! $\mathbb{Z}_7$)

$\Rightarrow$ $g(2) = 3$, zvolit můžeme libovolně

$\Rightarrow$ např. $f = 3x^3 - 2x^2 + 3$

$f(2)=5$ ... $f = g\cdot(x-2)+5$

$\Rightarrow$ $xf = g\cdot x(x-2) + 5x \equiv 2 \pmod{x^3+1}$

vyřeš pro g

(nejpracnější)

$f = ax^3 + bx^2 + cx + d$

... dle ČVZ pro $m_1 = x-2$, $m_2 = x^3+1$

bude existovat právě jeden takový stupně < 4

Vyřešíme soustavu rovnic pro koeficienty

$f(2) = a + 4b + 2c + d = 5$

$xf = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx \equiv -ax - b + cx^2 + dx$

$= cx^2 + (d-a)x - b = 2$

$\Rightarrow$ $b = -2$

$d - a = 0$

$c = 0$

$\Rightarrow$ $a - 8 + d = 5$, $d = a$ $\Rightarrow$ $2a = 6$, $a = d = 3$

$\Rightarrow$ $f = 3x^3 - 2x^2 + 3$