**POLYNOM** proměnné $x$ nad komut. okruhem $R$

je výraz $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ (krátce $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$)

kde $\underbrace{a_0, \dots, a_n}_{\text{koeficienty}} \in R$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.

absolutní člen

vedoucí koef.

stupeň

$\deg f$

$0$ je taky polynom.

$\deg 0 = -1$

$a_n = 1$ … <u>monický</u> polynom

Rozumí se $a_j = 0 \ \forall j > n$.

Operace na polynomech:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i$$

$$-\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (-a_i) x^i$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j+k=i} a_j b_k\right) x^i$$

$R[x] := (\text{polynomy}, +, -, \cdot, 0, 1)$

<u>Tvrzení</u>: Je-li $R$ komut. okruh, pak $R[x]$ je taky komut. okruh.

## POLYNOM proměnné $x$ nad komut. okruhem $R$

je výraz $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ (krátce $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$)

kde $\underbrace{a_0, \dots, a_n}_{\text{koeficienty}} \in R$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. 0 je taky polynom.

absolutní člen

vedoucí koef.

stupeň $\deg f$

$\deg 0 = -1$

$a_n = 1$ … <u>monický</u> polynom

Rozumí se $a_j = 0 \ \forall j > n$.

Operace na polynomech:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right) &= \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i \\
-\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) &= \sum_{i=0}^{n} (-a_i) x^i \\
\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right) &= \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j+k=i} a_j b_k\right) x^i
\end{aligned}\right\} \quad R[x] := (\text{polynomy}, +, -, \cdot, 0, 1)$$

<u>Tvrzení</u>: Je-li $R$ obor, pak $R[x]$ je taky obor.

Buď $R \leq S$ obory. (typicky $\mathbb{Z} \leq \mathbb{C}$)

Pro polynom $\underbrace{f \in R[x]}_{f = \underbrace{\sum a_i x^i}_{\text{výraz}}}$ a prvek $u \in S$ definujeme <u>hodnotu</u> $f$ <u>v</u> $u$

$$f(u) := \underbrace{\sum a_i u^i}_{\text{výpočet v oboru } S} \in S$$

Dostali jsme tzv. <u>polynomiální zobrazení</u> dané polynomem $f$

$$\begin{aligned} S &\to S \\ u &\mapsto f(u) \end{aligned}$$

Můžeme také uvažovat <u>dosazovací homomorfismus</u>

$$\begin{aligned} R[x] &\to S \\ f &\mapsto f(u) \end{aligned}$$

Řekneme, že $g \mid f$ v oboru $R[x]$, pokud $\exists q \in R[x]$ t.ž. $f = g \cdot q$.

$g \mid f,\ f \neq 0 \implies \deg g \leq \deg f$

<u>Tvrzení</u> (dělení se zbytkem):

vedoucí koeficient $g$

Buď $R$ obor, $f, g \in R[x]$, předpokládejme, že $l(g) \in R^*$, $g \neq 0$

Pak $\exists!\ q, r \in R[x]$ t.ž. $\boxed{f = g \cdot q + r}$ & $\boxed{\deg r < \deg g}$.

$f \operatorname{div} g$ $\quad$ $f \bmod g$

Created by Notein

Buď $R \leq S$ obory, $f \in R[x]$. Řekneme, že $u \in S$ je **kořen polynomu $f$ v $S$**, pokud $f(u) = 0$.

**Tvrzení**: Za těchto předpokladů

$$f(u) = 0 \iff x - u \mid f \text{ v oboru } S[x]$$

Navíc, $f \bmod (x-u) = f(u)$.

**Věta**: Buď $R$ obor, $0 \neq f \in R[x]$, $\deg f = n$.
Pak $f$ má nejvýše $n$ kořenů.

Buď $R, S$ obory, $u \in S$, $f \in R[x]$.

Řekneme, že $u$ je <u>$k$-násobným kořenem</u> polynomu $f$,

pokud $(x-u)^k \mid f$, $(x-u)^{k+1} \nmid f$ v oboru $S$.

tj. pokud $\boxed{f = (x-u)^k \cdot g}$ pro nějaký $g \in S[x]$, $g(u) \neq 0$.

<u>Věta</u>: Buď $R$ obor, $0 \neq f \in R[x]$, $u \in R$, $k \leq \deg f$.

Pak $(1) \Rightarrow (2)$, a pokud $\operatorname{char} R \begin{cases} = 0 \\ \geq k \end{cases}$, tak $(2) \Rightarrow (1)$.

(1) $u$ je aspoň $k$-násobný kořen $f$

(2) $\underbrace{f^{(0)}(u) = f^{(1)}(u) = \ldots = f^{(k-1)}(u)}_{\text{0-tá až (k-1)-tá derivace polynomu}} = 0$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)' := \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} x^i \quad , \quad f^{(0)} = f, \quad f^{(m+1)} = \left(f^{(m)}\right)'$$

Created by Notein