Buď $T \leq S$ TĚLESOVÉ ROZŠÍŘENÍ.

Uvažujme S jako vektorový prostor S_T nad tělesem T.

def: STUPEŇ ROZŠÍŘENÍ $[S:T] := \dim S_T$.

Je-li dimenze konečná, hovoříme o rozšíření konečného stupně.

Uvažujme rozšíření $T \leq S$ a prvek $a \in S$.

def: STUPEŇ ROZŠÍŘENÍ $[S:T] := \dim S_T$.

def: Prvek a nazveme ALGEBRAICKÝ nad tělesem T, pokud $\exists \underset{\neq 0}{f \in T[x]}$ t.ž. $f(a) = 0$.

V opačném případě je a TRANSCENDENTNÍ.

def: MINIMÁLNÍ POLYNOM prvku a nad tělesem T je ireducibilní monický polynom $m \in T[x]$ t.ž. $m(a) = 0$. Značíme jej $m_{a,T}$.

Tvrzení: (1) Je-li a algebraický, pak minimální polynom existuje a je jednoznačně určený.

(2) $\forall f \in T[x] \quad f(a) = 0 \Leftrightarrow m_{a,T} \mid f$ v $T[x]$

Věta: Buď $T \leq S$ tělesové rozšíření, $a \in S$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) a je algebraický nad T

(2) $\boxed{T(a) = T[a]}$

(3) $[T(a) : T] < \infty$

Navíc, je-li a algebraický, tak $\boxed{[T(a) : T] = \deg m_{a,T}}$.

Created by Notein

Tvrzení: Buď $T \leq S \leq U$ tělesová rozšíření. Pak $\boxed{[U:T] = [U:S] \cdot [S:T]}$.

Speciálně, $[T(a,b):T] = [T(a,b):T(a)] \cdot [T(a):T]$

$$= \deg m_{b,T(a)} \cdot \deg m_{a,T}$$

!!

$$\leq \deg m_{b,T} \cdot \deg m_{a,T}$$

Tvrzení: Buď $T \leq S \leq U$ tělesová rozšíření. Pak $\boxed{[U:T] = [U:S] \cdot [S:T]}$.

Důsledek: Buď $T \leq S$, $a_1, \dots, a_n \in S$ algebraické nad T. Pak $[T(a_1, \dots, a_n) : T] < \infty$.

Tvrzení: Buď $T \leq S$ t.ž. $[S:T] < \infty$. Pak $\forall a \in S$ je algebraický nad T.

def.: Říkáme, že S je algebraické rozšíření T.

Věta: Buď $T \leq S$. Pak $\{a \in S : a \text{ algebraický nad } T\}$ tvoří podtěleso S.

Created by Notein

Tvrzení: Buď $T \leq S \leq U$ tělesová rozšíření. Pak $\boxed{[U:T] = [U:S] \cdot [S:T]}$.

Důsledek: Buď $T \leq S$, $a_1, \dots, a_n \in S$ algebraické nad T. Pak $[T(a_1, \dots, a_n) : T] < \infty$.

Tvrzení: Buď $T \leq S$ t.ž. $[S:T] < \infty$. Pak $\underbrace{\forall a \in S \text{ je algebraický nad } T}$.

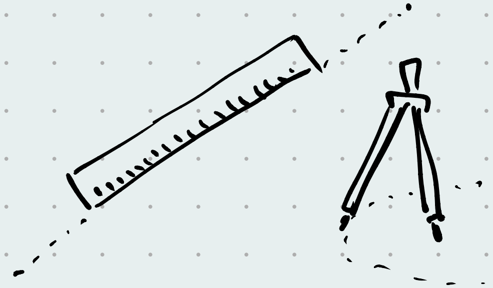
def.: Říkáme, že S je algebraické rozšíření T.

Poznámka: Buď $T \leq S$ t.ž. $[S:T] < \infty$. Pak $S = T(a_1, \dots, a_n)$, kde $a_1, \dots, a_n$ jsou algebraické prvky nad T.

ovšem často stačí $n = 1$, např.

- pro konečná tělesa
- v charakteristice 0 (věta o primitivním prvku)

KONSTRUKCE PRAVÍTKEM A KRUŽÍTKEM



je posloupnost $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_n$, kde

& M_i jsou konečné množiny bodů v rovině

$M_{i+1} = M_i \cup \{X\}$, přičemž X vznikne jako

$$\left.\begin{cases} \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} \\ \overleftrightarrow{AB} \cap k(C, |DE|) \\ k(A, |BC|) \cap k(D, |EF|) \end{cases}\right\} \text{ pro nějaké } A, B, C, D, E, F \in M_i$$

Zvol souřadnicový systém, uvažuj M_i jako podmnožiny $\mathbb{R}^2$. [Descartes]

Buď T_i nejmenší podtěleso $\mathbb{R}$ obsahující všechny souřadnicové hodnoty z M_i,

tj. $T_i = \mathbb{Q}(a_1, b_1, \dots, a_k, b_k)$ kde $M_i = \{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)\}$.

[Wantzel]

Lemma: $[T_{i+1} : T_i] = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \quad \forall i$

Důsledek: V jakékoliv konstrukci je $[T_n : T] = 2^k$ pro nějaké k.