

# PŮSOBENÍ grupy $G$ na množině $X$

je libovolný homomorfismus  $\pi: G \rightarrow S_X$

$$\hookrightarrow \text{tj. } \pi_{g \cdot h} = \pi_g \circ \pi_h, \quad \pi_{g^{-1}} = \pi_g^{-1}, \quad \pi_1 = \text{id}$$

značíme:  $\pi_g(x) =: g(x)$

def:  $x \sim y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists g \in G \quad g(x) = y$       "je to ekvivalence na  $X$ "

Bloky  $\sim$  se nazývají orbity, značíme:  $[x] = \{y \in X: y \sim x\} = \{g(x): g \in G\}$

Řekneme, že  $x$  je pevný bod pro  $g$ , pokud  $g(x) = x$ .

značíme:  $X_g = \{x \in X: g(x) = x\}$

$G_x = \{g \in G: g(x) = x\}$  ... stabilizátor bodu  $x$

$$\text{"} \circledast \text{" } G_x \leq G$$

PŮSOBENÍ grupy  $G$  na množině  $X$  je libovolný homomorfismus  $\pi: G \rightarrow S_X$

def:  $x \sim y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists g \in G \quad g(x) = y$      je to ekvivalence na  $X$

Bloky  $\sim$  se nazývají orbity, značí:  $[x] = \{y \in X: y \sim x\} = \{g(x): g \in G\}$

Řekneme, že  $x$  je pevný bod pro  $g$ , pokud  $g(x) = x$ .

Značí:  $X_g = \{x \in X: g(x) = x\}$

$G_x = \{g \in G: g(x) = x\}$  ... stabilizátor bodu  $x$       $G_x \leq G$

Trvzení: Necht'  $G$  působí na  $X$ . Pak  $|[x]| = [G: G_x]$      $\forall x \in X$

def:  $x \sim y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists g \in G \quad g(x) = y$      je to ekvivalence na  $X$

Bloky  $\sim$  se nazývají orbity, značení:  $[x] = \{y \in X : y \sim x\} = \{g(x) : g \in G\}$

Řekneme, že  $x$  je pevný bod pro  $g$ , pokud  $g(x) = x$ .

Značení:  $X_g = \{x \in X : g(x) = x\}$

$G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$  ... stabilizátor bodu  $x$       $G_x \leq G$

Trvzení: Necht'  $G$  působí na  $X$ . Pak  $|[x]| = [G : G_x] \quad \forall x \in X$

BURNSIDEOVA VĚTA: Necht' konečná grupa  $G$  působí na konečnou množinu  $X$ .

Pak

$$\# \text{orbit} = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g|$$

průměrný počet pevných bodů

Trvzení: Necht'  $G$  působí na  $X$ . Pak  $|\Sigma x| = [G : G_x] \quad \forall x \in X$

BURNSIDEOVA VĚTA: Necht' konečná grupa  $G$  působí na konečnou množinu  $X$ .

Pak 
$$\# \text{orbit} = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g|$$

Důsledky:

Jordanova věta: Bud'  $G \leq S_n$  tranzitivní grupa,  $|G| > 1$ .

Pak  $G$  obsahuje aspoň jednu permutaci bez pevného bodu.

Cauchyova věta: Bud'  $G$  konečná grupa a  $p$  prvočíslo t.ž.  $p \mid |G|$ .

Pak  $\exists g \in G$  t.ž.  $\text{ord}(g) = p$ .

Pozor! např.  $4 \mid |A_4|$ , ale v  $A_4$  neexistuje prvek řádu 4.

