Domácí úlohy 3.

do 31.5.2024

Úkoly odevzdávejte na prosemináři nebo je pošlete na email `mariagrodno@gmail.com` v jednom souboru ve formátu Prijmeni_cislosady.PDF (čitelný sken v jedenom souboru, na bílem pozadí bez tmavých okrajů). Uveďte také svoji přezdívku, pod kterou řešíte kahooty a pod kterou uvidíte výsledky na webu.

1. (5 bodů) Vysvětlete nějaké geograficky vzdálené osobě (humanitně založené sestře, spolužákovi, který nemá rád algebru, rodičům, zvídavému dědečkovi, ...), jak hrát kámen-nůžky-papír přes chat, a zahrajte si. Jako důkaz pošlete printscreen komunikace :-) (aspoň fragment, z kterého je vidět, jak hrajete). Jako jednosměrnou funkci použijte třeba diskrétní exponenciálu v $\mathbb{Z}_p^*$.

2. (5 bodů) Napište nějakou věrnou reálnou třídimenzionální reprezentaci grupy A_4. Jinými slovy, najděte prostý homomorfismus $A_4 \to GL_3(\mathbb{R})$.

Návod pro geometricky smýšlející studenty: Potkali jste někdy čtyřstěn?

Návod pro algebraicky smýšlející studenty: Uvažujte reprezentaci pomocí čtyřdimenzionálních permutačních matic (viz proseminář nebo skripta) a uvažujte podprostor $\mathbb{R}^4$ sestávající z vektorů, jejichž součet složek je 0. Uvažujte působení permutačních matic na tento podprostor a zapište ta lineární zobrazení v nějaké bázi.

Zvídavá otázka za extra body: Když provedete oba postupy, dostanete stejnou reprezentaci? Skoro stejnou? V jakém smyslu skoro stejnou?

3. (5 bodů) Dokažte, že kvaternionová grupa Q_8 má prezentaci

$$Q_8 \simeq \langle a, b \mid aba = b, bab = a \rangle.$$

4. (5 bodů) Napište fundamentální grupu (a) objektu, který sestává z hran krychle, (b) objektu, který sestává ze stěn krychle, (c) krychle.

5. (5 bodů) Vezměte kruh a slepte středově symetrické body na hranici (tj. pokud vezmeme kruh o poloměru 1 se středem v $(0,0)$, slepíme právě body (a,b) a $(-a,-b)$, kde $a^2 + b^2 = 1$). *(Nesnažte se lepit kus papíru, to je marné. Kreslete placaté obrázky jako pro torus a Kleinovu lahev.)* Výsledný prostor má fundamentální grupu izomorfní $\mathbb{Z}_2$. Konkrétně, zvolme bázový bod e na hranici kruhu. Napište mi, které cesty budou ekvivalentní triviální cestě a které ne, zdůvodněte proč součin dvou netriviálních cest lze zkontrahovat do bodu (stačí neformálně, rozkreslete animaci). *Návod:* průměr kruhu je cesta.

Taky si můžete rozmyslet, že právě popsaný prostor je totéž jako reálná projektivní rovina, čili $\pi_1(P^2\mathbb{R}) = \mathbb{Z}_2$.