Úlohy na procvičování.

Burnsideova věta

1. Spočtěte počet obarvení šachovnice 3×3 třemi barvami, z nichž každá se použije právě třikrát, a) až na otočení, b) až na otočení a převrácení.

2. Spočtěte počet náhrdelníků sestavených z k modrých a $8-k$ červených kuliček (tj. rozumí se až na otočení a převrácení). (Pozor, nevyjde jeden univerzální vzorec pro všechna k.)

3. Vyberte si platonské těleso (krychli, osmistěn, ...) a spočtěte a) počet obarvení stěn k barvami, b) počet umístění šipek směřujících k jednomu vrcholu na každou stěnu, oboje až na otočení.

4. Spočtěte počet *orientovaných* grafů na čtyřech vrcholech, až na izomorfismus.

5. Spočtěte počet algebraických struktur $(A, *)$, kde $|A| = 3$ a $*$ je binární operace, až na izomorfismus. (Anebo si aspoň pořádně rozmyslete případ $|A| = 2$ z přednášky.)

6. Spočtěte počet algebraických struktur (A, f, g), kde $|A| = 3$ a f, g jsou unární operace, až na izomorfismus.

Centralizátor

7. Vyberte si sudou permutaci π a spočtěte $C_{S_n}(\pi)$ a $C_{A_n}(\pi)$. Dalo by se to nějak využít k diskusi, pro která sudé permutace je $\pi^{A_n} = \pi^{S_n}$?

Normalizátor

8. Označme D podgrupu diagonálních matic v $G = GL_n(T)$.

(1) Všimněte si, že D není normální v G.

(2) Dokažte, že $N_G(D) = \{P_{\pi,\bar{a}} : \pi \in S_n, \bar{a} \in T^n\}$, kde $P_{\pi,\bar{a}}$ je modifikovaná permutační matice, která má v i-tém řádku prvek a_i (nikoliv jedničku). Tj. $P_{\pi,\bar{a}} = (p_{ij})$, $p_{ij} = a_i$ pro $j = \pi(i)$, 0 jindy.

(3) Dokažte, že $N_G(D)/D \simeq S_n$.