

Domácí úlohy 2.

do 17.4.2023 15:40

Úkoly odevzdávejte na prosemináři nebo mi je pošlete emailem v jednom souboru ve formátu PrijmeniPrijmeni_cislosady.PDF (čitelný sken v jednom souboru, na bílém pozadí bez tmavých okrajů). Každý z autorů nechť uvede přezdívkou, pod kterou uvidí výsledky na webu.

1. (5 bodů) Na závodech se sešli sportovci z pěti kontinentů, z každého kontinentu po jednom zástupci v každé z pěti disciplín. Nakreslete nějaké rozestavení sportovců do čtverce 5×5 , kde v každém řádku a každém sloupci bude po jednom sportovci z každého kontinentu a každé disciplíny, a navíc na diagonále jsou sami Evropani.

2. (5 bodů) Nakreslete karty Dobble s pěti symboly na každé kartě (kolik jich bude?). Pokud se vám to nechce dělat ručně, napište si na to počítačový program. Můžete mi karty vyfotit, nebo poslat výpis, jaké symboly budou na které kartě, nebo velmi podrobně popište postup a nakreslete či popište aspoň pět karet.

3. (5 bodů) Pomocí rozkladu v rozšíření $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ vyřešte diofantickou rovnici $x^2 + 4 = y^3$, kde x je liché.

4. (5 bodů) Spočítejte všechny průsečíky křivky dané rovnicí

$$(x^2 - 1)(x - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 = 0,$$

a přímky dané rovnicí $y = 1$ v projektivní rovině $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$. Jak je možné, že nevyšla čtyři křížení? Má tato křivka nějaký bod v nekonečnu?

Poznámka: Tato křivka se nazývá "bicuspid curve" (v angličtině *cusp* znamená *hrot*). Najděte si ji na wikipedii nebo si ji nechte nakreslit Wolfram Alphou. Všimněte si, jak jim vykreslování kolem hrotů trochu selhává.

5. (5 bodů) Načrtněte eliptickou křivku $y^2 = x^3 + 4x$ v projektivní rovině $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$. Tato křivka obsahuje přesně tři afinní body s racionálními souřadnicemi. Dokažte, že grupa $E_{\mathbb{Q}}(f)$ je čtyřprvková cyklická. *Rada:* diskutujte řady prvků