Domácí úkol č. 9 k přednášce NMAG111: Lineární algebra 1
zimní semestr 2022/2023
Datum odevzdání **čtvrtek, 15.12.2022, 10:40**

(9.1) V závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{Z}_5$ určete dimenze prostorů $\operatorname{Im} A_{a,b}$, $\operatorname{Im} A_{a,b}^T$, $\operatorname{Ker} A_{a,b}$ a $\operatorname{Ker} A_{a,b}^T$ pro matici

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} a+2 & b & 1 & 2 \\ 2a+1 & 2b & a+3 & 1 \\ 3a+b+3 & 3b & a+4 & b+3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 4} \ .$$

Nápověda: Stačí spočítat jednu z dimenzí a ostatní dopočítat použitím obecné teorie (zdůvodněte!). Může být výhodné používat řádkové i sloupcové úpravy.

(9.2) Uvažujte matici

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbb{R}$. Označme r hodnost matice A.

a) Napište matici A jako součin matic $4 \times r$ a $r \times 7$.

b) Napište matici A jako součet r matic hodnosti 1.

c) Ze součtu v části b) škrtněte tu matici, která má nejmenší vliv na výsledek, a spočtětě výslednou matici B. Optimalizujte funkci $\sum_{i,j}(a_{ij} - b_{ij})^2$, kde $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$. Nakreslete matice A i B jako obrázky 4×7, kde hodnota na pozici i, j udává stupeň šedi (0=bílá, 1=černá).

Nápověda: Pokud nemáte rádi zlomky, tak v částech a),b) počítejte s maticí $3A$ a na závěr upravte výsledek.

Poznámka: V části c) vám chci ukázat příklad na ztrátovou kompresi matice (ve smyslu konce přednášky č. 16 z 1.12.). Můžete rozjímat nad tím, jak moc se oba obrázky liší a čím to je. Pokud vás problém zaujal, zkuste si následující bonusové úlohy:

- teoretická úloha: Co se stane, když budete ztrátově kompresit regulární matici $n \times n$? A co matici $n \times m$ hodnosti m?

- praktická úloha: Zkuste si to naprogramovat a kompresit (ztrátově i neztrátově) reálné obrázky. Bude se vám hodit nějaký pěkný matematický software jako třeba Matheamtica, nebo nějaká lineárně algebraická knihovna do pythonu, třeba NumPy.

- alternativní interpretace: Zkuste si nějaké čistě černobílé obrázky; v tom případě je přirozené brát matice nad $\mathbb{Z}_2$. Na hraní jsou dobré třeba digitální cifry v rastru 5×3, tam je spousta lineárních závislostí, ale můžete zkusit v ruce spočítat i větší obrázek, kde je skutečně vidět nějaká komprese (třeba srdíčko, nebo něco podobného, ideálně osově symetrického, v rastru řádově 10×10).