

Domácí úkol č. 9 k přednášce NMAG112: Lineární algebra 2

letní semestr 2022/2023

Datum odevzdání **pátek 28.4.2023, 10:40**

(9.1) Popište (buď geometricky nebo uvedením možných matic vzhledem k bázím) všechny ortogonální operátory φ na \mathbb{R}^3 splňující podmínku $\varphi^6 = \varphi$.

Nápověda: Všimněte si, že $\varphi^5 = \text{id}$ a tedy $(\det[\varphi]_B^B)^5 = 1$ a poté využijte Tvzení 10.26 ze skript.

(9.2) Označme výraz

$$V(a, b, c) = 3a^2 + 2b^2 + 4c^2 - 4ab + 2ac - 3bc.$$

Dokažte, že $V(a, b, c) \geq 0$ pro libovolná reálná čísla a, b, c .

Nápověda: Použijte následující postup: napište $V(a, b, c) = (a, b, c)A(a, b, c)^T$ pro vhodnou symetrickou matici A , ukažte, že A je pozitivně definitní (na výpočet kořenů polynomu použijte software) a z toho vyvodte odpověď.

Bonusový problém: Dokažte, že čtvercová komplexní matice A řádu n je normální, právě když $\|A\mathbf{v}\| = \|A^*\mathbf{v}\|$ pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$.