Domácí úkol č. 8 k přednášce NMAG111: Lineární algebra 1
zimní semestr 2022/2023

Datum odevzdání **čtvrtek, 8.12.2022, 10:40**

(8.1) V prostoru reálných polynomů nad tělesem reálných čísel uvažujme podprostor **V** určený množinou

$$V = \left\langle 1, x, x^2, x^3 \right\rangle$$

a jeho podprostor **W** určený množinou

$$W = \{f \in V : f(-2) = 0\} \ .$$

Najděte nějakou bázi prostoru **W**.

Poznámka: To, že **W** je skutečně podprostor prostoru **V** (a že **V** je podprostor prostoru reálných funkcí) nemusíte ověřovat, ale rozmyslete si to.

Nápověda: Napište si, jak vypadá obecný prvek prostoru W a vyřešením vhodné soustavy odhadněte bázi. Důkaz, že nalezená posloupnost **funkcí** (nikoliv aritmetických vektorů) tvoří bázi prostoru **W** můžete provést z definice báze.

(8.2) Pan Bonifacci, konkurent pana Fibonacciho, také množí králíky, ale nepovedlo se mu sehnat ty nesmrtelné, takže mu po dvou vrzích (tj. v třetí generaci) umírají. Čili počet králičích párů je dán vztahem

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$$

pro všechna $n \geq 3$ (tj. přežívají ti z minulé generace, rodí ti z předminulé generace, po vrhu umírají ti z předpředminulé generace).

Uvažujte podprostor V prostoru $\mathbb{R}^\omega$ sestávající ze všech posloupností splňujících tuto rovnici. Jaká je jeho dimenze? Najděte bázi B prostoru V sestávající z posloupností, které jsou geometrickou nebo aritmetickou posloupností (tj. posloupností tvaru $a_n = q^n$, resp. $a_n = qn$, pro nějaké $q \in \mathbb{R}$). Napište matici přechodu od "kanonické báze" K k vaší nalezené bázi B; "kanonickou bází" K v této úloze rozumím bázi sestávající z posloupností, které začínají $(1, 0, 0, ...)$, $(0, 1, 0, ...)$ atd. Napište explicitní vzorec pro posloupnost, která odpovídá situaci, že jste si v nulté generaci koupili jeden pár mláďátek (tj. $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 2$).

Návod: Inspirujte se Příkladem 5.54 (a přednáškou z 28.11.). Rozdíl je v tom, že tuto rovnici řeší nejen geometrická (tj. exponenciální) posloupnost, ale také aritmetická (tj. lineární) posloupnost. Nenechte se rozhodit tím, že ty geometrické posloupnosti jsou trochu divné. Vzorec můžete také uhodnout, ale stejně chci, abyste jej spočetli pomocí matice přechodu.

Bonusový problém: Pan Mičurinetti byl nešťastný, že králíci umírají tak brzo, a tak vyšlechtil plemeno, které vymírá o generaci později, po třech vrzích. Čili počet králičích párů je dán vztahem

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-4}.$$

Řešte stejnou úloh pro tento vztah.

Návod: Na výpočet kořenů jistého polynomu třetího stupně můžete použít `www.wolframalpha.com` . Nenechte se rozhodit tím, že vyjdou komplexní kořeny (co to znamená?).

Na závěr si všimněte, jaké je tzv. asymptotické chování všech těch posloupností. Pan Fibonacci má v n-té generaci přibližně $c \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ králíků, pro jistou konstantu c (ta druhá geometrická posloupnost jde limitně k nule), čili jde o exponenciální růst o základu $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$. Jak zjistíte, pan Mičurinetti svým šlechtěním dosáhl také exponenciálního růstu, o základu přibližně 1.32, i bez nesmrtelnosti. Pan Bonifacci je na tom se svým lineárním růstem podstatně hůře. (Nejlépe je na tom samozřejmě kouzelník Tuttifrutti, který umí králíka zdvojit mávnutím kouzelné hůlky a dosahuje tak základu 2, a nejhůř pan Kaputti, kterému králíci umírají hned po prvním vrhu, a tak dostane posloupnost konstantní. Teoretická řešení se zápornými a necelými počty králíků nechme stranou.)