

Domácí úkol č. 3 k přednášce NMAG112: Lineární algebra 2

letní semestr 2022/2023

Datum odevzdání **pátek, 10.3.2023, 10:40**

(3.1) Uvažujme dvě báze $B_1 = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ a $B_2 = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ vektorového prostoru \mathbb{R}^n a označme G_j Gramovu matici posloupnosti B_j vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu (pro $j = 1, 2$). Ukažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (a) existuje ortogonální matice Q řádu n taková, že $Q\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$;
- (b) $G_1 = G_2$.

Návod: Těžká je pouze implikace (\uparrow). Vzpomeňte si na podzimní semestr: existuje právě jedno lineární zobrazení, které zobrazuje vektory báze B_1 na vektory báze B_2 . Spočtete matici, kterou je to zobrazení určené, a za pomoci podmínky (b) dokažte, že je ta matice ortogonální.

Poznámka: Tvrzení platí obecněji, pro jakýkoliv konečně generovaný vektorový prostor a libovolný skalární součin. Roli matice Q pak bude hrát ortogonální zobrazení. Jako bonus si můžete rozmyslet, jak by se vaše řešení předělalo na tento obecnější případ.

(3.2) Nechť V je vektorový prostor spojitých reálných funkcí s definičním oborem $[1, 5]$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin na V daný vztahem

$$\langle f, g \rangle = \int_1^5 fg .$$

Najděte ortonormální bázi podprostoru $\text{LO}\{1, x, x^2\}$ a ortogonální projekci funkce $\sin(x)$ na tento podprostor.

Poznámky:

- Funkce $1, x, x^2, \sin(x)$ chápeme jako prvky V , tj. zužujeme je na interval $[1, 5]$.
- K výpočtu integrálů použijte libovolný software (např. WolframAlpha), výsledky **počítejte numericky** s rozumnou přesností (např. 2–3 platné cifry).
- Interpretace výsledku je následující: jde o „nejlepší“ aproximaci funkce sinus polynomem stupně ≤ 2 na intervalu $[1, 5]$. Rozmyslete si, v jakém smyslu „nejlepší“, a případně si zkuste vypočítanou projekci spolu s funkcí sinus vynést na počítači do grafu, abyste je mohli vizuálně porovnat.