Domácí úkol č. 10 k přednášce NMAG112: Lineární algebra 2
letní semestr 2022/2023
Datum odevzdání **pátek 5.5.2023, 10:40**

Na výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů můžete použít software (třeba WolframAlpha).

Uvažujme reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(10.1) Spočítejte singulární rozklady matic A, A^T, AA^T a A^TA.

Návod: Nejdřív spočítejte singulární rozklad matice $A^* = A^T$ a poté si uvědomte, že $A = UDV^*$ je singulární rozklad, právě když je $A^* = (UDV^*)^* = VD^*U^*$ singulární rozklad. Z toho snadno odvodíte rozklady i pro AA^* a A^*A, aniž byste znovu počítali vlastní čísla.

(10.2) Najděte reálnou matici B takovou, aby platily rovnosti $ABA = A$, $BAB = B$ a zároveň AB i BA byly symetrické matice.

Návod: Zkuste nejdřív najít obdobnou matici E pro matici D ze singulárního rozkladu matice A. Tj. najděte E tak, aby $DED = D$, $EDE = E$ a zároveň matice ED i DE byly symetrické. Pak zkuste vymyslet, jak se od E dostanete k B.

Návod 2 (pokud vám ten první nestačí): Škoda, že nemůžeme vzít $E = D^{-1}$, protože to nejsou čtvercové matice. Nemohli bychom vzít E tak, aby $DE = I_3$ a $ED = I_4$? Úplně ne, protože součin matic hodnosti 3 nemůže být matice hodnosti 4, ale tak nějak skoro…

Bonusový problém: Frobeniova norma matice A typu $m \times n$ je definována vzorcem

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \ .$$

Dokažte, že platí

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2} \ ,$$

kde $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ je seznam singulárních hodnot matice A, každé tolikrát kolik je jeho násobnost.