

Cvičení 7

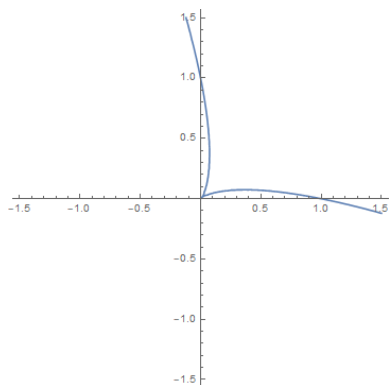
Přípravy posílejte v jednom dokumentu ve formátu pdf do **12.4.2021 23:59** na email fstrakos@karlin.mff.cuni.cz. Cvičení je doporučeno řešit v malých skupinkách, ale řešení píše každý sám a sepsaná řešení již nesdílejte.

Úlohy, jejichž řešení považujete za kompletní a správné, prosím, viditelně označte. K řešení, prosím, přiložte svoji přezdívku.

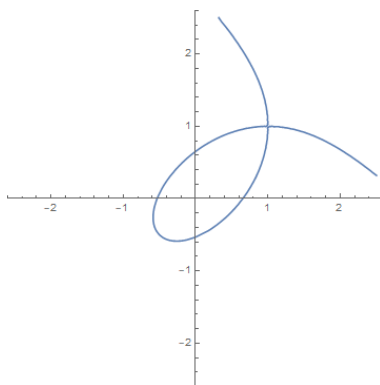
1. Z následujících křivek si vyberte 4 a určete jejich jednoduché a násobné body nad tělesem \mathbb{R} . Vyberte si nějaký jednoduchý bod a spočítejte v něm tečnu. Určete tečny ve všech násobných bodech. Alespoň jednu z křivek si vyberte takovou, že její násobné body neleží v počátku.

Na případné hledání kořenů může být třeba matematický software.

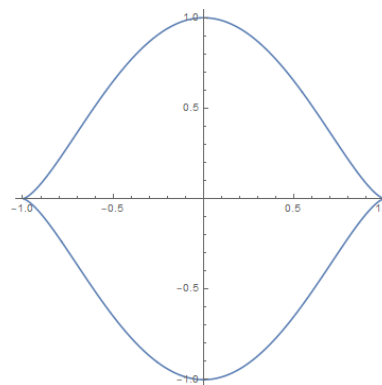
S dvěma hvězdičkami pro geometry: Spočítejte si heart curve a uvědomte si, že 4 singulární body jsou v pořádku. Jak to souvisí se strukturou hladké variety na heart curve? Použij větu o implicitní funkci.



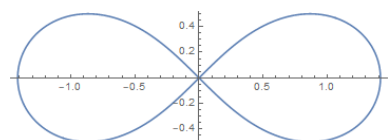
(a) $f = y^3 - y^2 + x^3 - x^2 + 3xy^2 + 3x^2y + 2xy$



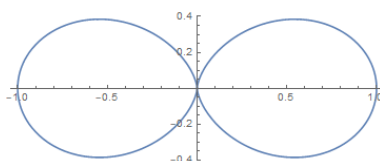
(b) $f = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 3xy + 1$



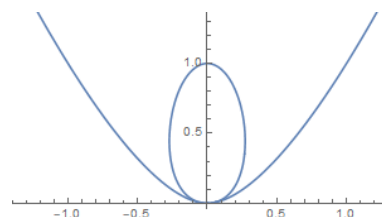
(c) $f = y^2 - (1 - x^2)^3$



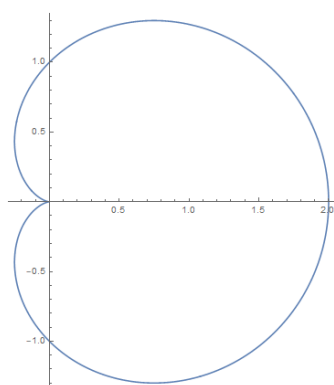
(d) $f = (y^2 + x^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$
lemniscate of Bernoulli



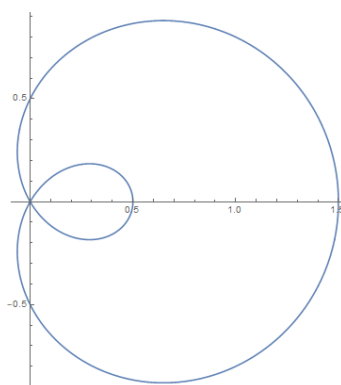
(e) $f = (y^2 + x^2)^3 - x^4$
double egg



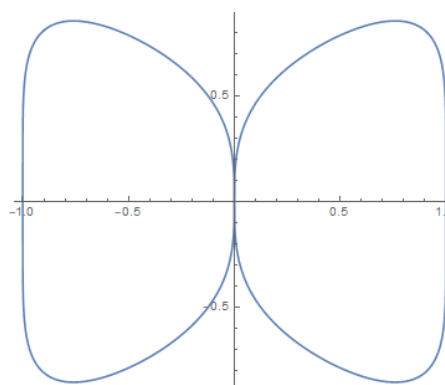
(f) $f = y^3 - (y - 2x^2)^2$



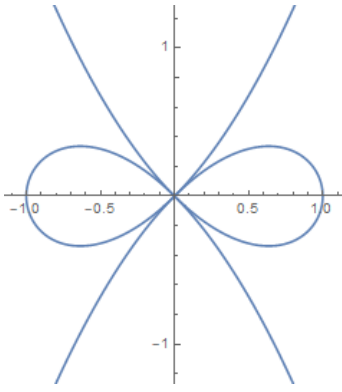
(g) $f = (y^2 + x^2 - x)^2 - (x^2 + y^2)$



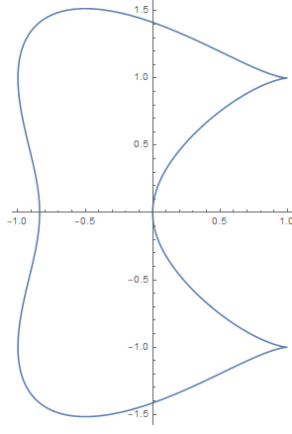
(h) $f = (y^2 + x^2 - x)^2 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$



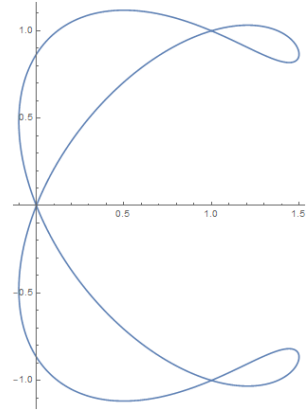
(i) $f = x^6 + y^6 - x^2$
butterfly curve



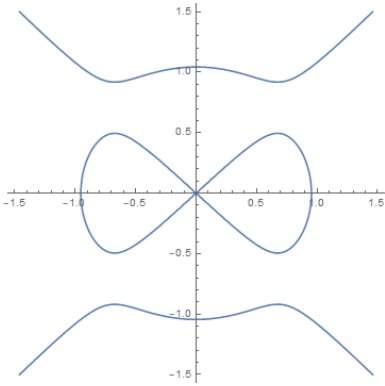
(a) $f = (y^2 + x^2)x^4 - (x^2 - y^2)^2$
bow tie curve



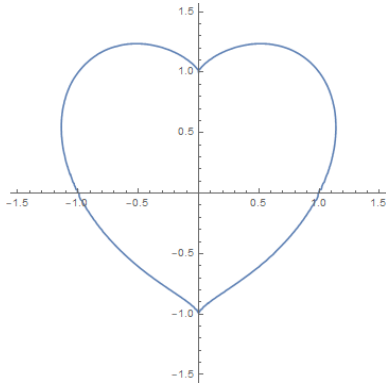
(b) $f = (x^2 - 1)(x - 1)^2 + (y^2 - 1)^2$



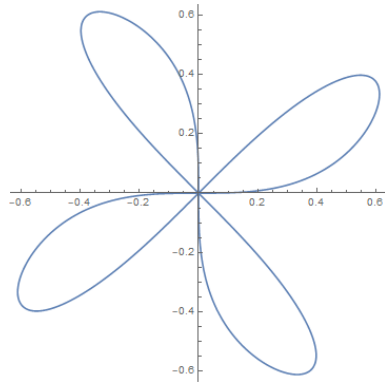
(c) $f = (y^2 - x^2)(x - 1)(2x - 3) - 4(x^2 + y^2 - 2x)^2$



(d) $f = x^4 - y^4 - \frac{1}{10}x^2 + \frac{19}{10}y^2$
devil's curve



(e) $f = (x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2y^3$
heart curve



(f) $f = (y^6 + x^6) - xy(x^2 - y^2)$
boat propeller

(Soustu dalších hezkých křivek najdete zde:

<https://www.mathcurve.com/courbes2d.gb/algebric/algebric.shtml>)

2. Necht K je libovolné. Je-li rovinná křivka f forma stupně n , $P \in V(f)$ bod násobnosti n , pak je f sjednocením n (ne nutně různých) přímek.
3. Ať $K = \overline{K}$. Ukažte, že ireducibilní rovinná křivka má pouze konečně mnoho násobných bodů.