Cvičení 4

Přípravy posílejte v jednom dokumentu ve formátu pdf do **21.3.2021 23:59** na email fstrakos@karlin.mff.cuni.cz Cvičení je doporučeno řešit v malých skupinkách, ale řešení pište každý sám a sepsaná řešení již nesdílejte. Úlohy, jejichž řešení považujete za kompletní a správné, prosím, viditelně označte. K řešení, prosím, přiložte svoji přezdívku.

1. Ukažte, že všechny kružnice v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ jsou isomorfní.
2. Ukažte, že všechny přímky v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ jsou isomorfní.
3. Ukažte, že přímka a parabola $V(x - y^2)$ v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ jsou isomorfní.
4. Ukažte, že v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$
   (a) přímka a kružnice (=$V((x-m)^2 + (y-n)^2 - r)$ pro $r > 0$) nejsou isomorfní,
   (b) přímka a hyperbola (=$V(xy - 1)$) nejsou isomorfní,
   (c) kružnice a hyperbola nejsou isomorfní (ale nad $\mathbb{C}$ jsou).
5. Ukažte, že zobrazení $f : \mathbb{A}^1(K) \to V(y^2 - x^3)$ dané předpisem $t \mapsto (t^2, t^3)$ je polynomiální bijekce, ale nikoli isomorfismus.
6. Najděle pro těleso K varietu $X \subseteq \mathbb{A}^3(K)$, aby její souřadnicový okruh byl izomorfní $K[x]$.
7. Pro kažkou z algebraických množin X níže najděte surjektivní polynomiální zobrazení $f : \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \to X$, popište zobrazení $\tilde{f} : \Gamma(X) \to \Gamma(\mathbb{A}^1(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{C}[t]$ a vysvětlete, proč je $\tilde{f}$ prosté.
   (a) $X = V(y^2 - x^2(x+1)) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$,
   (b) $X = V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$,
   (c) $X = V(x^3 - yz, y^2 - xz, z^2 - x^2y) \subseteq \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$.
8. Označme $D = K[x]/J$, kde $J = (x^2)$ je ideál v $K[x]$. Rozhodněte, zda existuje ireducibilní algebraická podmnožina $\mathbb{A}^1(K)$ taková, že D je její souřadnicový okruh.