Cvičení 3

Přípravy posílejte v jednom dokumentu ve formátu pdf do **14.3.2021 23:59** na email fstrakos@karlin.mff.cuni.cz Cvičení je doporučeno řešit v malých skupinkách, ale řešení pište každý sám a sepsaná řešení již nesdílejte. Úlohy, jejichž řešení považujete za kompletní a správné, prosím, viditelně označte.

1. Ať C je afinní algebraická křivka v $\mathbb{A}^2(K)$, tj. $C = V(f),\ f \in K[x,y]$. Ať L je přímka v $\mathbb{A}^2(K),\ L \nsubseteq C$. Potom $L \cap C$ je konečná množina s nejvýše $deg(f)$ body.
2. Rozhodněte, zda je množina $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) : (x - cos(2\pi z))^2 + (y - sin(2\pi z))^2 = 0\}$ algebraická množina.
3. Rozložte $X = V(x^2 - xy - x^2y + x^3) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ na variety
4. Rozložte $X = V(y^4 - x^2, y^4 - x^2y^2 + xy^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ na variety.
5. Rozložte na variety:
   (a) $X = V(x^2 + y^2 - 1, x^2 - z^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$,
   (b) $X = \{(t, t^2, t^3),\ t \in \mathbb{C}\}$ a popište $I(X)$.
6. Ukažte, že $X = V(x^2 + y^2(y-1)^2) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ je reducibilní, i když $f = x^2 + y^2(y-1)^2$ je ireducibilní polynom nad $\mathbb{R}$.
7. Rozložte $X = V(y^2 - xz, z^2 - y^3) \subseteq \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ na ireducibilní komponenty.
8. Ať $K = \bar{K}$. Pro ideál $J \subseteq K[x,y]$ najděte $\sqrt{J}$.
   (a) $J = (xy, (x-y)x)$,
   (b) $J = (x^3 - y^6, xy - y^3)$.
9. Ať $I = (xy, xz, yz) \subseteq K[x,y,z]$. Ukažte, že I je radikálový.