Cvičení 1

1. Dokažte následující vlastnosti:

   (a) $I = (S),\ S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$, pak $V(I) = V(S)$,

   (b) $I, J \subseteq K[x_1, \ldots, x_n], I \subseteq J$pak $V(I) \supseteq V(J)$,

   (c) ať $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ jsou ideály v $K[x_1, \ldots, x_n]$, pak $V(\cup_{\alpha \in A} I_\alpha) = \cap_{\alpha \in A} V(I_\alpha)$,

   (d) $I, J \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$, pak $V(I \cdot J) = V(f \cdot g,\ f \in I,\ g \in J) = V(I) \cup V(J)$,

   (e) $V(0) = \mathbb{A}^n(K)$,
   $V(1) = \emptyset$,
   $V(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) = \{(a_1, \ldots, a_n)\}\ \forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$,

   (f) Ať $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n(K), X \subseteq Y$, pak $I(X) \supseteq I(Y)$,

   (g) $I(\emptyset) = K[x_1, \ldots, x_n]$,
   $I(\mathbb{A}^n(K)) = 0$, pokud je K nekonečné,
   $I(a_1, \ldots, a_n) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$,

   (h) $\forall S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n] :\ S \subseteq I(V(S))$,
   $\forall X \subseteq \mathbb{A}^n(K) :\ X \subseteq V(I(X))$

   (i) $\forall S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n] :\ V(I(V(S))) = V(S)$,
   $\forall X \subseteq \mathbb{A}^n(K) : I(V(I(X))) = I(X)$.

2. Zjednodušte v $\mathbb{C}$:

   (a) $V(x^3 + 3x + 3x^2 + 1,\ x^2 - 8x + 15)$,

   (b) $V(x^2yz + 3x^2 + yz + 3\ , x^2z^2 + x^2z + x^2y + z^2 + z + y)$.

3. Ať K je nekonečné těleso, $f \in K[x_1, \ldots, x_n],\ f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$.
   Pak $f = 0$.

4. Dokažte, že algebraické podmnožiny $\mathbb{A}^1(K)$ jsou $\mathbb{A}^1(K)$ a konečné podmnožiny.

5. Ať K je konečné těleso, pak každá podmnožina $\mathbb{A}^n(K)$ je algebraická.