Řešení cvičení 8, 5.1.2020

Důležité úlohy:

1. Ireducibilní prvky:

   a) Pokud má prvek $\alpha \in \mathcal{O}_K$ normu p, což je prvočíslo v $\mathbb{Z}$, pak je α ireducibilní v $\mathcal{O}_K$.

   b) Najdi nějaký ireducibilní prvek v $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ s prvočíselnou normou.

   c) Dokaž, že 3 a $1+\sqrt{-14}$ jsou ireducibilní.

   d) Dokaž, že $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = (5+2\sqrt{-14})(5-2\sqrt{-14})$ jsou dva různé ireducibilní rozklady.

   Řešení: a) $\alpha = \beta\gamma$ implikuje $N\alpha = (N\beta)(N\gamma)$, netrivialita rozkladu: $\beta \parallel 1$ právě tehdy, když $N\beta = 1$.

   b) třeba $3+\sqrt{-14}$, norma 23.

   c) kdyby $3 = \alpha\beta$ netriviální rozklad, pak $N\alpha = N\beta = 3$, ale takový prvek neexistuje.

   d) 3 je ireducibilní dle c), $\xi = 5\pm 2\sqrt{-14}$ je ireducibilní, protože má normu 81, takže rozklad by musel obsahovat prvek normy 3 nebo 9, ale prvek normy 3 neexistuje a prvky normy 9 jsou pouze dva, a to ± 3 a ani jeden z nich ξ nedělí.

2. Hlavní ideály:

   a) Dokaž, že $(17+2\sqrt{-14}, 20+\sqrt{-14}) = (3-\sqrt{-14})$ je hlavní ideál v $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$.

   b) Dokaž, že $(2,\sqrt{-14})$ není hlavní ideál v $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$.

   c) Dokaž, že $(2+\sqrt{-14}, 7+2\sqrt{-14}) = (3, 1-\sqrt{-14})$ a že jde o vlastní ideál, který není hlavní.

   Návod: Pokud chceme dokázat $(\alpha,\beta) = (\gamma)$, musíme dokázat $(\subseteq)$ $\alpha,\beta \in (\gamma)$, tj. $\gamma \mid \alpha,\beta$, a dále $(\supseteq)$ $\gamma \in (\alpha,\beta)$.

   Pokud chceme určit, zda je daný ideál I hlavní, hledáme prvek normy NI, který tento ideál generuje. Pokud totiž $I = (\alpha)$, pak $NI = N\alpha$. Pokud prvek takové normy neexistuje, I nemůže být hlavní. V opačném případě zkoušíme všechny takové prvky.

   Vlastní ideály se poznají tak, že mají normu $\neq 1$.

   Řešení: a) $(\supseteq)$ $3-\sqrt{-14} = -(17+2\sqrt{-14}) + (20+\sqrt{-14})$. $(\subseteq)$ Napíšeme $20+\sqrt{-14} = (3-\sqrt{-14})(a+b\sqrt{-14}) = (3a+14b)+(-a+3b)\sqrt{-14}$. Máme soustavu dvou rovnic, která má celočíselné řešení $a=2, b=1$, takže $20+\sqrt{-14} \in (3-\sqrt{-14})$. Ten druhý generátor pak vyjádříme pomocí vztahu z $(\supseteq)$.

   b) Norma je podle vzorce $NSD(N2, N\sqrt{-14}, Tr(-2\sqrt{-14})) = NSD(4,14,0) = 2$, ale prvek normy 2 neexistuje.

   c) Rovnost dokažte dle návodu. Norma vyjde $NSD(N3, N(1-\sqrt{-14}), Tr(3+\sqrt{-14})) = NSD(9,15,6) = 3$ a takový prvek neexistuje.

3. Násobení ideálů a rozklady:

   a) Dokaž $(5+\sqrt{-14}, 2+\sqrt{-14})(4+\sqrt{-14}, 2-\sqrt{-14}) = (6, 3\sqrt{-14})$.

   b) Buď $I = (3, 1+\sqrt{-14})$ a $J = (5, 1+\sqrt{-14})$. Spočtěte normy těchto ideálů a dokaž, že $(15) = IJI'J'$. Využij toho k nalezení dvou různých ireducibilních rozkladů 15.

Řešení: a) Obecně $(\alpha, \beta)(\gamma, \delta) = (\alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta)$. Roznásobte pro tyto konkrétní čísla a dále dokažte rovnost dvou ideálů jako v úloze 2.

b) Podle vzorce nahoře vyjdou normy 3 a 5, čili jde o prvoideály — to je stejný princip jako 1a), kdyby $I = JL$, pak $NI = (NJ)(NL)$, čili $NJ = 1$ nebo $NL = 1$, čili $J = O_K$ nebo $L = O_K$. Dále $N(15) = 3^2 \cdot 5^2$, takže rozklad bude na prvoideály norem 3,5 — normu 15 prvoideál mít nemůže, viz věta, že prvoideály mají normu p, p^2; ta samá věta také říká, že norma p^2 je možná právě tehdy, když je (p) prvoideál, což pro 3 ani 5 není. Takže $(15) = SPQR$, kde $NS = NP = 3$, $NQ = NR = 5$. Které ideály normy 3,5 to splňují? Obecně je třeba zkoušet, ale zde nikoliv, protože víme, že $II' = (NI) = (3)$, $JJ' = (NJ) = (5)$, a tedy $(15) = (3)(5) = II'JJ'$.