Cvičení 7, 14.12.2020

IV korespondence
Buď K těleso.

1. Rozhodni, které z následujících množin jsou algebraické:
   a) $\{(t,t^2,t^3) \in \mathbb{R}^3 : \ t \in \mathbb{R}\}$,
   b) $\{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 : \ t \in \mathbb{R}\}$,
   c) $\mathbb{Z}$ (jako podmnožina $\mathbb{R}^1$),
   d) * $\mathbb{Z}^2$ (jako podmnožina $\mathbb{R}^2$),
   e) * $\{(t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 : \ t \in \mathbb{R}\}$.
   Řešení: a) ano, $= V(y-x^2, z-x^3)$, b) ano, $= V(x^2+y^2-1)$, c) ne, $V(F)$ je konečná nebo celé $\mathbb{R}$, de) plyne z 2., uvažujte $y = 0$.
2. Buď X algebraická podmnožina K^n a $u \in K$. Dokažte, že množina

   $$Y = \{(a_1, \dots, a_{n-1}) : \ (a_1, \dots, a_{n-1}, u) \in X\}$$

   je algebraická v K^{n-1}. Nyní by vám mělo řešení úloh 1de) připadat snadné.
   Návod: Pokud $X = V(F)$, pak $Y = V(\{f(x_1, \dots, x_{n-1}, u) : f \in F\})$.
3. Pro ideál I v $K[x_1, \dots, x_n]$ dokaž $\sqrt{I} \subset I(V(I))$.
   Řešení: $f \in \sqrt{I} \ \Rightarrow \ \exists n \ f^n \in I \ \Rightarrow \ \exists n \ f^n(\bar{a}) = 0$ pro všechna $\bar{a} \in V(I) \ \Rightarrow \ f(\bar{a}) = 0$ pro všechna $\bar{a} \in V(I) \ \Rightarrow \ f \in I(V(I)$.
4. Pokud K není algebraicky uzavřené, pak Hilbertova věta o nulách neplatí (tedy věty 3.15b), 3.16).
   Řešení: $K = \mathbb{R}$, $I = (x^2+1)$ ... je to maximální ideál v $\mathbb{R}[x]$, není tvaru $(x-a)$, $I(V(I)) = I(\emptyset) = \mathbb{R}[x] \neq \sqrt{I}$. Ve vyšší dimenzi uvažujte ideál $(x^2+y^2+...+1)$, respektive maximální ideál, který jej rozšiřuje.
5. Uvažujte přímku $X = V(x,y)$ v K^3, uvažujte K nekonečné. Popište ideál $I(X)$.
   Návod: $f \in I(X) \ \Rightarrow \ f(0,0,u) = 0$ pro všechna $u \in K \ \Rightarrow \ f(0,0,u)$ je nulový polynom $\Rightarrow$ všechny členy f obsahují x nebo $y \ \Rightarrow \ f \in (x,y)$. Opačná inkluze je zřejmá, čili $I(X) = (x,y)$.

Ireducibilní rozklady algebraických množin

1. Dokaž, že přímka $V(x,y)$ je ireducibilní v K^3, pro libovolné nekonečné těleso K.
   Návod: Buď $V(x,y) = A \cup B$ netriviální rozklad, pak $K = A' \cup B'$, kde $A' = \{u : (0,0,u) \in A\}$ a $B' = \{u : (0,0,u) \in B$ (uvažuj polynomy, kde dosadím $x = y = 0$). Ale K je nerozložitelná v K, protože algebraické množiny v dimenzi 1 mají jen konečně mnoho prvků, s výjimkou celého K.
2. Dokaž, že všechny přímky v K^n jsou ireducibilní, pro libovolné nekonečné těleso K.
   Návod: Provedeme pro $n = 3$, myšlanka je stejná v libovolné dimenzi. Uvažuj rozklad přímky $X = V(f,g) = A \cup B$. Vezmi afinní změnu souřadnic (tj. transformaci $x' = ax + by + cz + d$, $y' = ...$, $z' = ...$) takovou, že $f' = x$ a $g' = y$ (stačí vhodná rotace a posunutí). Stejným způsobem transformujte polynomy určující množiny A, B. Dostaneme netriviální rozklad $X' = V(x,y) = A' \cup B'$, spor s 1.

3. Dokaž, že parabola $V(y-x^2) \subset \mathbb{C}^2$ je ireducibilní.

   Návod: Uvažuj libovolný f ireducibilní v $\mathbb{C}[x,y]$, např. $y-x^2$ (dokažte!). Pak (f) je prvoideál (dokažte!), čili radikálový ideál, a tedy $I(V(f)) = \sqrt{(f)} = (f)$ je prvoideál, tedy $V(f)$ je ireducibilní dle Tvrzení 3.18.

4. Urči množinu $V(y^4-x^2, y^4-x^2y^2+xy^2-x^3) \subset \mathbb{C}^2$ a rozlož ji na ireducibilní komponenty.

   Řešení: Rozlož dané polynomy: $f = y^4 - x^2 = (y^2-x)(y^2+x)$, $g = y^4 - x^2y^2 + xy^2 - x^3 = (y-x)(y+x)(y^2+x)$. Čili $V(f,g) = V(y^2-x, g) \cup V(y^2+x, g)$.

   První část rozkladu lze dále rozložit jako $V(y^2-x, y-x) \cup V(y^2-x, y+x) \cup V(y^2-x, y^2+x)$ a tyhle soustavy je snadné vyřešit, řešením je množina $\{(0,0),(1,1),(1,-1)\}$.

   Druhou část rozkladu lze dále rozložit jako $V(y^2+x, y-x) \cup V(y^2+x, y+x) \cup V(y^2+x, y^2+x)$, první dvě soustavy je snadné vyřešit a vidíme, že tvoří podmnožinu té třetí, což je parabola $V(y^2+x)$, která je ireducibilní dle 3.

   Složíme vše dohromady a vidíme, že ireducibilní rozklad je $V(y^2+x) \cup \{(0,0)\} \cup \{(1,1)\} \cup \{(1,-1)\}$ (jednobodovky jsou ireducibilní).

5. Rozlož $V(x^2+y^2-1, x^2-z^2-1) \subset \mathbb{C}^3$ na ireducibilní komponenty.

   Návod: Polynomy odečtěte, výsledek rozložte a najděte rozklad.

6. Dokaž, že $f = y^2 + x^2(x-1)^2 \in \mathbb{R}[x,y]$ je ireducibilní polynom, ale množina $V(f) \subset \mathbb{R}^2$ je reducibilní.