Cvičení 6, 7.12.2020 - návody a řešení

Příklady označené (!) jsou zásadní a nutně musíte pochopit řešení. Každé sadě věnujeme 45 minut.

Radikály

1. (!) V oboru $\mathbb{Z}$ urči $\sqrt{(125)}$, $\sqrt{(666)}$, $\sqrt{(\prod_i p_i^{r_i})}$ pro po dvou různá prvočísla p_i.

   Řešení: Je to ideál $(\prod_i p_i)$. Stačí vzít $\max(r_1, \dots, r_n)$-tou mocninu prvku dělitelného tímto číslem a padne do ideálu $(\prod_i p_i^{r_i})$.
2. (!) Urči nilradikál a Jacobsonův radikál okruhu $\mathbb{Z}/(100)$. Myslím, že je užitečné si nakreslit uspořádanou množinu všech ideálů a podívat se, jak to je s těmi průniky. Pro která n je $(\mathbb{Z}/(n))/J(\mathbb{Z}/(n))$ těleso?

   Řešení: Právě tehdy, když n je mocnina prvočísla. Maximální ideály a prvoideály jsou totéž, a jsou to právě ideály (a), kde $a \mid n$ (ztotožňujeme n a nulu), jak je vidět z 2. věty o izomorfismu. Průnik maximálních ideálů je tedy ideál $(p_1 \cdots p_k)$, kde $n = \prod_i p_i^{r_i}$. Těleso vyjde právě tehdy, když to je maximální ideál, tedy když je generovaný prvočíslem, tedy právě tehdy když n je mocnina prvočísla.
3. (!) Urči nilradikál a Jacobsonův radikál oboru $\mathbb{C}[x]$.

   Návod: Uvažuj maximální ideály $(x - a)$, $a \in \mathbb{C}$.
4. (!) V $\mathbb{Q}[x]$ a v $\mathbb{C}[x]$ urči $\sqrt{(x^6 - x^4 - x^2 + 1)}$.

   Řešení: Stačí ten polynom rozložit a zlikvidovat násobné ireducibilní činitele. Vidíme, že odpověď je pro obě tělesa $x^4 - 1$.
5. Dokaž, že v $\mathbb{C}[x]$ platí $\sqrt{(f)} = (\frac{f}{NSD(f,f')})$ pro každý $f \in \mathbb{C}[x]$.

   Návod: Připomeňte si větu o vícenásobných kořenech. Derivace f' obsahuje lineární činitele polynomu f v o jedna menší mocnině, takže $f/NSD(f, f')$ obsahuje právě všechny lineární činitele v první mocnině.

Celistvé prvky

1. (!) Dokažte detaily Důsledku 2.2 (o tom, že celistvé prvky tvoří podokruh). Konkrétně, jde o následující tvrzení: je-li okruh S konečně generovaný R-modul a okruh U konečně generovaný S-modul, pak U je konečně generovaný R-modul.

   Návod: Je to úplně stejná myšlenka jako v druhácké větě o tom, že $[U : T] = [U : S] \cdot [S : T]$, akorát že teď to nejsou vektorové prostory, ale jen moduly. Ta část důkazu, která dokazuje, že množina součinů je generující, projde doslova stejně. Ta část o lineární nezávislosti vůbec ne (to v modulech analogii obecně nemá), ale na to se nikdo neptá.
2. (!) Rozhodněte, zda je číslo $\sqrt{\sqrt{2}+1}$ celistvé a) nad $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, b) nad $\mathbb{Z}$. Pokud ano, napište příslušný monický polynom.

   Řešení: Ano, a) $x^2 - 2$, b) plyne ihned z předchozího cvičení. Stačí tedy najít minimální polynom nad $\mathbb{Q}$, ten bude nutně řešením (viz příští cvičení), s trochou invence se dopočítáte k $x^4 - 2x^2 - 1$.
3. (!) Dokažte, že prvek a je celistvý nad $\mathbb{Z}$ právě tehdy, když je $m_{a,\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}[x]$. *Návod:* Gaussovo lemma.
4. (!) Urči okruh celistvých prvků (nad $\mathbb{Z}$) v tělese a) $\mathbb{Q}(i)$, b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, c) * $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Nejspíš se vám bude hodit předchozí cvičení.

Řešení: Minimální polynomy musí být monické celočíselné. Analyzujte tedy kořeny polynomu x^2+bx+c. Vyjde a) $\mathbb{Z}[i]$, b) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, c) $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}] = \{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\sqrt{-3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

5. Označme $R = \mathbb{Z}[x, y]/I$, kde $I = (x^2 - 2, y^2 - x - 1)$. Rozhodněte, zda

   a) prvek $x + I$ je celistvý nad $\mathbb{Z}$,

   b) prvek $y+I$ je celistvý nad $\mathbb{Z}[x+I]$ (rozumí se meziokruh mezi $\mathbb{Z}$ a R generovaný prvkem $x + I$).

   c) prvek $y + I$ je celistvý nad $\mathbb{Z}$.

   Návod: Je to úplně stejná úloha jako 2, ten faktorokruh je izomorfní $\mathbb{Z}[\sqrt{\sqrt{2}+1}]$.

6. Buď R gaussovský obor a T jeho podílové těleso. Je-li $u \in T$ celistvé nad R, pak $u \in R$. *Říkal jsem na přednášce, ale kdo jste to neslyšel, tak si to rozmyslete!*