Cvičení 4 - návody, 10.11.2020

Příklady označené (!) jsou zásadní a nutně musíte pochopit řešení. Příklady označené (*) jsou těžší.

Separabilní rozšíření

1. (!) Buď $U \supset T$ rozšíření těles. Prvek $a \in U$ je separabilní nad T právě tehdy, když je kořenem nějakého separabilního polynomu z $T[x]$.

   Řešení: Pokud $f(a) = 0$, pak $m_{a,T} \mid f$, ale $m_{a,T}$ nemá vícenásobné kořeny, *čili* nemůže mít vícenásobné kořeny ani f *(proč?)*.

2. (!) Buď $U \supset T$ rozšíření těles. Všechny prvky $\alpha \in U$, jež jsou separabilní nad T, tvoří podtěleso U (tzv. separabilní uzávěr T v U).

   Návod: Použij Tvrzení 2.15. Princip je úplně stejný jako pro důkaz, že algebraické prvky tvoří podtěleso.

   Řešení: Buď $a, b \in U$ separabilní, uvažuj $T(a, b)$, to je konečného stupně protože jde o algebraické prvky, tedy je separabilní podle 2.15, čili jsou separabilní i jeho prvky $a + b$, $a \cdot b$ atd.

Normální a Galoisova rozšíření

1. (!) Buď $V \supset U \supset T$ rozšíření těles.

   a) Ať $V \supset T$ je normální. Musí být $V \supset U$ je normální? Musí být $U \supset T$ normální? Pokud ne, najděte protipříklad.

   b) Ať $V \supset T$ je Galoisovo. Musí být $V \supset U$ je Galoisovo? Musí být $U \supset T$ Galoisovo? Pokud ne, najděte protipříklad.

   Řešení: První otázky ANO, ihned plyne z definice. Druhé otázky NE, třeba $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset$ rozkladové nadtěleso $x^3 - 2$.

2. (!) Buď $U \supset T$ Galoisovo rozšíření. Pak $[U : T] = \#\mathrm{Gal}(U/T)$.

   Návod: Plyne z Věty 2.19 a základních myšlenek výpočtu Galoisovy grupy.

   Řešení: Podle Věty 2.19 to je jednoduché rozšíření, takže $U = T(a)$ pro nějaké a, přitom $n := [U : T] = \deg m_{a,T}$. Podle Lemmatu 2.22 se $m_{a,T}$ v U rozkládá, takže U je jeho rozkladové nadtěleso. Generátor a je kořen $m_{a,T}$, takže se zobrazuje zase na kořen a máme $\#Gal \leq n$. Polynom $m_{a,T}$ je ireducibilní, takže Gal je tranzitivní na kořenech, těch je n díky separabilitě, takže $\#Gal \geq n$.

3. Dokaž tvrzení 2.23 ze skript (rozšíření je normální právě tehdy, když je rozkladové pro množinu polynomů).

4. Dokaž tvrzení 2.24 ze skript (o existenci normálního uzávěru).

5. Buď $f \in T[x]$ polynom, jehož ireducibilní rozklad nad T je $f = f_1 \cdots f_k$, kde f_i jsou pod dvou neasociované. Uvažujme Galoisovu grupu rozkladového nadtělesa polynomu f jako grupu permutací na množině jeho kořenů. Dokaž, že každá z těchto permutací obsahuje aspoň k cyklů (pevný bod zde považujeme za cyklus délky 1).