

Domácí úkoly 2, do 30.11.2020 23:59

Uložte ve formátu PDF na google drive a pošlete odkaz na fstrakos@karlin.mff.cuni.cz. Pokud píšete rukou, vyrobte dobře čitelnou kopii – vřele doporučuji aplikaci AdobeScan.

- (5 bodů) Bud' U těleso a $G < \text{Aut}(U)$ podgrupa. Dokaž, že pak pro všechna $\varphi \in \text{Aut}(U)$ platí $\text{Fix}(U, \varphi G \varphi^{-1}) = \varphi(\text{Fix}(U, G))$.
- (5 bodů) Najdi prvek $\alpha \in \mathbb{C}$ takový, že $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\alpha)$. Vše pečlivě dokažte, nepoužívejte „očividná fakta“ typu „součet dvou odmocnin není racionální číslo“, nepoužívejte tvrzení, která nejsou ve skriptech plně dokázána (např. větu 2.28).
- (7 bodů) Bud' U rozkladové nadtěleso polynomu $f(x) = x^7 - 1$ nad tělesem \mathbb{Q} . Napiš nějakou bázi U jako vektorového prostoru nad tělesem \mathbb{Q} . Popiš prvky $\text{Gal}(U/\mathbb{Q})$, s kterou známou grupou je izomorfní? Nakresli, jak vypadá uspořádaná množina mezitěles (vzor viz cvičení), vrcholy popiš ve formě $\text{Fix}(U, \dots)$ nebo $\mathbb{Q}(a)$, cokoliv vám přijde jednodušší.

V této úloze se můžete inspirovat cvičeními 5 a 6, kde se řešil případ pro $n = 12$, resp. obecné n . Očekávám ovšem kompletní řešení, nikoliv fráze typu "stejně jako ve vzorovém řešení si čtenář odvodí, že ..." Můžete se zamyslet nad tím, jak se mezitělesa zapíší ve formě $\mathbb{Q}(a)$, ale to není úplně jednoduchá úloha.

- (8 bodů) Bud' U rozkladové nadtěleso polynomu $f(x) = x^4 - 2$ nad tělesem \mathbb{Q} . Napiš nějakou bázi U jako vektorového prostoru nad tělesem \mathbb{Q} . Popiš prvky $\text{Gal}(U/\mathbb{Q})$ a dokaž, že je izomorfní dihedralní grupě D_8 . Nakresli, jak vypadá uspořádaná množina mezitěles (vzor viz cvičení), vrcholy nemusíte popisovat. Zakroužkujte ty z nich, které odpovídají normálním rozšířením $\mathbb{Q} \subset V$. Vyznačte vrcholy odpovídající \mathbb{Q} , $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.