Cvičení 8, 5.1.2020

Důležité úlohy:

1. Ireducibilní prvky:

   a) Pokud má prvek $\alpha \in \mathcal{O}_K$ normu p, což je prvočíslo v $\mathbb{Z}$, pak je α ireducibilní v $\mathcal{O}_K$.

   b) Najdi nějaký ireducibilní prvek v $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ s prvočíselnou normou.

   c) Dokaž, že 3 a $1+\sqrt{-14}$ jsou ireducibilní.

   d) Dokaž, že $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (5+2\sqrt{-14})(5-2\sqrt{-14})$ jsou dva různé ireducibilní rozklady.

2. Hlavní ideály:

   a) Dokaž, že $(17+2\sqrt{-14}, 20+\sqrt{-14}) = (3-\sqrt{-14})$ je hlavní ideál v $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$.

   b) Dokaž, že $(2, \sqrt{-14})$ není hlavní ideál v $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$.

   c) Dokaž, že $(2+\sqrt{-14}, 7+2\sqrt{-14}) = (3, 1-\sqrt{-14})$ a že jde o vlastní ideál, který není hlavní.

3. Násobení ideálů a rozklady:

   a) Dokaž $(5+\sqrt{-14}, 2+\sqrt{-14})(4+\sqrt{-14}, 2-\sqrt{-14}) = (6, 3\sqrt{-14})$.

   b) Buď $I = (3, 1+\sqrt{-14})$ a $J = (5, 1+\sqrt{-14})$. Spočtěte normy těchto ideálů a dokaž, že $(15) = IJI'J'$. Využij toho k nalezení dvou různých ireducibilních rozkladů 15.

Další úlohy:

4. Buď $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ a $\omega = \sqrt{D}$, resp. $\frac{1+\sqrt{D}}{2}$ pro $D \equiv 2, 3$, resp. $1 \pmod 4$. Uvažuj $m \in \mathbb{Z}$ a $\alpha = a + b\omega \in \mathcal{O}_K$.

   a) Dokaž, že $m \mid \alpha$ v $\mathcal{O}_K$, právě když $m \mid a, b$ v $\mathbb{Z}$.

   b) Pozor, při reprezenetaci $\alpha = a + b\sqrt{D}$ to neplatí! Například $2 \mid 1+\sqrt{5}$.

5. Najdi všechny jednotky v $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ pro $D = -2, -3, -7$, *2, *5.
6. Buď G podgrupa aditivní grupy $\mathbb{Z}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Dokaž, že $G \simeq \mathbb{Z}^m$ pro nějaké m, $0 \leq m \leq n$.
7. Vyřeš diofantické rovnice $x^2+1=y^5$, $x^2+3=y^3$ a $x^2+4=y^3$.