Cvičení 6, 7.12.2020

Příklady označené (!) jsou zásadní a nutně musíte pochopit řešení. Každé sadě věnujeme 45 minut.

Radikály

1. (!) V oboru $\mathbb{Z}$ urči $\sqrt{(125)}$, $\sqrt{(666)}$, $\sqrt{(\prod_i p_i^{r_i})}$ pro po dvou různá prvočísla p_i.
2. (!) Urči nilradikál a Jacobsonův radikál okruhu $\mathbb{Z}/(100)$. Myslím, že je užitečné si nakreslit uspořádanou množinu všech ideálů a podívat se, jak to je s těmi průniky. Pro která n je $(\mathbb{Z}/(n))/J(\mathbb{Z}/(n))$ těleso?
3. (!) Urči nilradikál a Jacobsonův radikál oboru $\mathbb{C}[x]$.
4. (!) V $\mathbb{Q}[x]$ a v $\mathbb{C}[x]$ urči $\sqrt{(x^6 - x^4 - x^2 + 1)}$.
5. Dokaž, že v $\mathbb{C}[x]$ platí $\sqrt{(f)} = (\frac{f}{NSD(f,f')})$ pro každý $f \in \mathbb{C}[x]$.

Celistvé prvky

1. (!) Dokažte detaily Důsledku 2.2 (o tom, že celistvé prvky tvoří podokruh). Konkrétně, jde o následující tvrzení: je-li okruh S konečně generovaný R-modul a okruh U konečně generovaný S-modul, pak U je konečně generovaný R-modul.
2. (!) Rozhodněte, zda je číslo $\sqrt{\sqrt{2}+1}$ celistvé a) nad $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, b) nad $\mathbb{Z}$. Pokud ano, napište příslušný monický polynom.
3. (!) Dokažte, že prvek a je celistvý nad $\mathbb{Z}$ právě tehdy, když je $m_{a,\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}[x]$. *Návod:* Gaussovo lemma.
4. (!) Urči okruh celistvých prvků (nad $\mathbb{Z}$) v tělese a) $\mathbb{Q}(i)$, b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, c) * $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Nejspíš se vám bude hodit předchozí cvičení.
5. Označme $R = \mathbb{Z}[x,y]/I$, kde $I = (x^2 - 2, y^2 - x - 1)$. Rozhodněte, zda
   a) prvek $x + I$ je celistvý nad $\mathbb{Z}$,
   b) prvek $y+I$ je celistvý nad $\mathbb{Z}[x+I]$ (rozumí se meziokruh mezi $\mathbb{Z}$ a R generovaný prvkem $x+I$).
   c) prvek $y + I$ je celistvý nad $\mathbb{Z}$.
6. Buď R gaussovský obor a T jeho podílové těleso. Je-li $u \in T$ celistvé nad R, pak $u \in R$. *Říkal jsem na přednášce, ale kdo jste to neslyšel, tak si to rozmyslete!*

Radikály – doplňující úlohy
Následující úlohy se skoro jistě nestihnou a nejsou stěžejní pro pochopení přednášky, ale ilustrují hlouběji probírané pojmy, doporučuji se na to podívat někdy před zkouškou. Něco z toho se objeví v domácím úkolu.

1. Dokažte, že $\sqrt{P^n} = P$ pro každý prvoideál P a $n \in \mathbb{N}$ (zde P^n značí součin n kopií prvoideálu P). Speciálně to znamená, že prvoideály jsou radikály.
2. Dokažte, že Jacobsonův radikál je radikálový ideál, tj. $\sqrt{J(R)} = J(R)$.
3. Buď I, J ideály. Dokažte, že
   - $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$,
   - $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$,

- $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$,
- $\sqrt{I} = R$ právě tehdy, když $I = R$.

4. Buď I ideál v R. Dokažte, že $\sqrt{I}$ v R je rovno sjednocení bloků, které jsou v nilradikálu okruhu R/I. Stručně řečeno, $\sqrt{I} = \bigcup \sqrt{0/I}$. *(Tedy pokud budete rozumět nilradikálům, budete umět počítat i ostatní radikály tím, že přejdete k faktorokruhu.)*
5. Buď $a \in R$. Dokažte, že a je invertibilní právě tehdy, když nenáleží do žádného maximálního ideálu.
6. Pomocí předchozího cvičení dokažte Tvrzení 3.9.
7. Pomocí předpředchozího cvičení dokažte, že R obsahuje právě jeden maximální ideál právě tehdy, když množina všech neinvertibilních prvků tvoří ideál. *(Budete potřebovat v předmětu Algebraické křivky.)*
8. Dokažte, že R obsahuje právě jeden prvoideál právě tehdy, když pro každý neinvertibilní prvek a existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $a^k = 0$.
9. Spočtěte Jacobsonův radikál komutativního okruhu všech spojitých reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, s operacemi po složkách.
10. Buď $p_1, \ldots, p_n$ prvočísla. Označme $R = \{\frac{r}{s} \in \mathbb{Q} : p_1, \ldots, p_n \nmid s\}$ (rozumí se zlomek v základním tvaru, tj. $\mathrm{NSD}(r, s) = 1$).
    (a) Dokažte, že R je podokruh tělesa $\mathbb{Q}$, tedy je oborem integrity.
    (b) Dokažte, že R má přesně n maximálních ideálů.
    (c) Spočtěte $J(R)$.