Cvičení 5, 23.11.2020

Příklady označené (!) jsou zásadní a nutně musíte pochopit řešení. Příklady označené (*) jsou těžší.

Galoisova korespondence
Buď U rozkladové nadtěleso polynomu f nad tělesem T. Urči $[U : T]$, $\mathrm{Gal}(U/T)$ (její prvky i izomorfismus na některou známou grupu) a popiš všechna tělesa $U \supset V \supset T$.

1. (! *ukážu, jak se dělá*) $f(x) = x^3 - 2, T = \mathbb{Q}$.
2. (! *ukážu, jak se dělá*) $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 1), T = \mathbb{Q}$.
3. (!) $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 1)(x^2 - 3), T = \mathbb{Q}$. Vycházejte z faktu, že $[U : \mathbb{Q}] = 8$.
4. (!) $f(x) = (x^2 - a_1) \dots (x^2 - a_n), T = \mathbb{Q}$, kde $a_1, ..., a_n$ splňují předpoklady věty 2.28. Vycházejte z faktu, že $[U : \mathbb{Q}] = 2^n$. Řešení je popsáno ve skriptech (věta 2.28), pořádně si ho rozmyslete. Speciálně bych rád, abyste si pečlivě dokázali izomorfismus $\mathrm{Gal}(U/T) \simeq \mathbb{Z}_2^n$.
5. (!*) $f(x) = x^{12} - 1, T = \mathbb{Q}$.
6. (!) $f(x) = x^n - 1$, $T = \mathbb{Q}$. Vycházejte z faktu, že že $[U : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$, kde φ je Eulerova funkce (to je ta těžší část). Řešení je popsáno ve skriptech (pod větou 2.28), pořádně si ho rozmyslete. Speciálně bych rád, abyste si pečlivě dokázali izomorfismus $\mathrm{Gal}(U/T) \simeq \mathbb{Z}_n^\times$.
7. (!) $f(x) = x^5 - 2, T = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/5})$
8. (!*) $f(x) = x^{20} - 1, T = \mathbb{Q}(i)$.

Abstraktní Galoisovy korespondence

1. Buď V vektorový prostor se skalárním součinem. Buď $(A, \subseteq) = (B, \subseteq)$ uspořádaná množina všech podmnožin V, uvažujte $\alpha(X) = \beta(X) = X^\perp$. Dokažte, že jde o Galoisovu korespondenci. Co je $Im(\alpha)$ a $Im(\beta)$?
2. *(pro studenty, kteří absolvovali kurz logiky)* Buď L jazyk. Buď $(A, \subseteq)$ uspořádaná třída všech množin modelů v jazyce L. Buď $(B, \subseteq)$ uspořádaná množina všech množin formulí v jazyce L. Pro $X \in A$ uvažujte $\alpha(X) = \{\varphi : \mathcal{A} \vDash \varphi$ pro všechna $\mathcal{A} \in X\}$. Pro $Y \in B$ uvažujte $\beta(Y) = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \vDash \varphi$ pro všechna $\varphi \in Y\}$. Dokažte, že jde o Galoisovu korespondenci.

Další fakta o Galoisových grupách

1. Mějme tělesa $V \supset U \supset T$ taková, že $V \supset T$ a $U \supset T$ jsou normální rozšíření. Pak $\mathrm{Gal}(V/U) \lhd \mathrm{Gal}(V/T)$ a $\mathrm{Gal}(V/T)/\mathrm{Gal}(V/U) \simeq \mathrm{Gal}(U/T)$.

Zájemcům též doporučuji četbu důkazu, že $[\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}) : \mathbb{Q}] = 2^n$, viz odkaz ve skriptech (věta 2.28).