

## Cvičení 4, 10.11.2020

Příklady označené (!) jsou zásadní a nutně musíte pochopit řešení. Příklady označené (\*) jsou těžší.

### *Separabilní rozšíření*

1. (!) Bud'  $U \supset T$  rozšíření těles. Prvek  $a \in U$  je separabilní nad  $T$  právě tehdy, když je kořenem nějakého separabilního polynomu z  $T[x]$ .
2. (!) Bud'  $U \supset T$  rozšíření těles. Všechny prvky  $\alpha \in U$ , jež jsou separabilní nad  $T$ , tvoří podtěleso  $U$  (tzv. separabilní uzávěr  $T$  v  $U$ ).

### *Normální a Galoisova rozšíření*

1. (!) Bud'  $V \supset U \supset T$  rozšíření těles.
  - a) Ať  $V \supset T$  je normální. Musí být  $V \supset U$  je normální? Musí být  $U \supset T$  normální? Pokud ne, najděte protipříklad.
  - b) Ať  $V \supset T$  je Galoisovo. Musí být  $V \supset U$  je Galoisovo? Musí být  $U \supset T$  Galoisovo? Pokud ne, najděte protipříklad.
2. (!) Bud'  $U \supset T$  Galoisovo rozšíření. Pak  $[U : T] = \#\text{Gal}(U/T)$ .
3. Dokaž tvrzení 2.23 ze skript (rozšíření je normální právě tehdy, když je rozkladové pro množinu polynomů).
4. Dokaž tvrzení 2.24 ze skript (o existenci normálního uzávěru).
5. Bud'  $f \in T[x]$  polynom, jehož ireducibilní rozklad nad  $T$  je  $f = f_1 \cdots f_k$ , kde  $f_i$  jsou pod dvou neasociované. Uvažujme Galoisovu grupu rozkladového nadtělesa polynomu  $f$  jako grupu permutací na množině jeho kořenů. Dokaž, že každá z těchto permutací obsahuje aspoň  $k$  cyklů (pevný bod zde považujeme za cyklus délky 1).