Cvičení 3, 2.11.2020

Příklady označené (!) jsou zásadní a nutně musíte pochopit řešení. Příklady označené (*) jsou těžší.

Kořenová a rozkladová nadtělesa

1. (!) Určete kořenové a rozkladové nadtěleso polynomu $x^2 + 3$ nad tělesem $\mathbb{R}$.
2. (!) Určete všechna možná kořenová nadtělesa pro f nad $\mathbb{Q}$ obsažená v $\mathbb{C}$ (existují i jiná než obsažená v $\mathbb{C}$?), nějaké rozkladové nadtěleso pro f nad $\mathbb{Q}$, stupně rozšíření všech těchto těles a popište jejich Galoisovy grupy nad $\mathbb{Q}$ (vypište její prvky a určete, které známé grupě je izomorfní).
   a) $f(x) = x^2 - 1$
   b) $f(x) = x^3 - 1$
   c) $f(x) = x^2 + 3$
   d) $f(x) = x^4 - 1$
   e) $f(x) = x^4 + 1$
   f) $f(x) = x^3 - 2$
   Výpočet Galoisovy grupy pro e,f) je *, ale měli byste tomu rozumět.
3. Popište Galoisovu grupu rozšíření $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ nad $\mathbb{Q}$.
4. * V závislosti na n popište Galoisovu grupu rozkladového nadtělesa polynomu x^n-1. Na základě pár příkladů si tipněte, kolik bude stupeň rozšíření, ale bez další teorie se vám váš odhad nejspíš nepovede dokázat.
5. Buď $0 \neq a \in \mathbb{Q}$. Dokažte, že rozkladovým nadtělesem polynomu $f = x^n - a$ nad tělesem $\mathbb{Q}$ je těleso $Q(e^{2\pi i/n}, b)$, kde b je libovolný komplexní kořen polynomu f.
6. Spočtěte prvky Galoisovy grupy $Gal(\mathbb{R}/\mathbb{Q})$.

T-homomorfismy

1. (!) Buďte T, U tělesa charakteristiky 0. Pak $\mathbb{Q} \subset T, U$ (co to přesně znamená?) a každý nenulový okruhový homomorfismus $\varphi : T \to U$ je prostým $\mathbb{Q}$-homomorfismem. (Nulovým homomorfismem rozumíme zobrazení $x \mapsto 0$.)
2. (!) Buď S_1, S_2 rozkladová nadtělesa pro polynom f nad tělesem T a buď ψ T-izomorfismus těchto těles. Dokažte, že $Gal(S_1/T) \to Gal(S_2/T)$, $\varphi \mapsto \psi\varphi\psi^{-1}$ je izomorfismus příslušných Galoisových grup.
3. Buď $T \subset U$ algebraické rozšíření těles a $U \subset K$ (ne nutně algebraické). Pak K je algebraický uzávěr U, právě když K je algebraický uzávěr T.
4. Pro která $m, n \in \mathbb{Z}$ jsou tělesa $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ $\mathbb{Q}$-izomorfní?

Algebraický uzávěr

1. Žádné konečné těleso není algebraicky uzavřené.
2. * Algebraický uzávěr nekonečného tělesa T má stejnou mohutnost jako T.

Opakování z druháku
Následující větičky byste měli umět dokázat z hlavy, aniž byste museli studovat druhácká skripta.

1. Ať je prvek α algebraický nad tělesem T a $f \in T[x]$ je jeho minimální polynom. Pak $[T(\alpha) : T] = \deg f$.
2. Mějme tělesa $T \subset U \subset V$. Je-li V algebraické nad U a U algebraické nad T, pak je také V algebraické nad T.
3. Prvek α je algebraický nad tělesem T, právě když $T(\alpha) = T[\alpha]$.
4. Rozšíření těles konečného stupně je nutně algebraické.
5. Mějme rozšíření těles $V \supset U \supset T$. Pak $[V : T] = [V : U] \cdot [U : T]$.