Cvičení 2, 20.10.2020

Příklady označené (!) jsou zásadní a nutně musíte pochopit řešení. Příklady označené (*) jsou těžší.

Noetherovskost

1. (!) Rozhodněte, zda je okruh $\mathbb{Q}$ konečně generovaný jako a) $\mathbb{Z}$-modul, b) $\mathbb{Q}$-modul, c) okruh, d) těleso.
2. (!) Buď M noetherovský modul a N jeho podmodul. Dokaž, že pak je faktormodul M/N noetherovský.
3. (*) Buď M modul a N jeho podmodul. Pokud jsou N a M/N oba noetherovské, pak je noetherovský také M (použij tvrzení 1.10).
4. Buď K těleso. Dokažte, že $K[x_1, x_2, \ldots]$ (nekonečně mnoho proměnných) je gaussovský, ale ne noetherovský, a není to ani obor hlavních ideálů.

Čínská věta o zbytcích

1. (!) Popiš všechny ideály v okruhu $\mathbb{Z}/(150)$ a charakterizuj, které dvojice z nich jsou komaximální.
2. (!) Buď R obor hlavních ideálů, $m_1, \ldots, m_n$ jeho po dvou nesoudělné prvky a označme $M = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$. Dokažte pomocí čínské věty o zbytcích, že
$$R/(M) \simeq R/(m_1) \times \ldots \times R/(m_n).$$
3. (!) Buď R okruh a $I_1, \ldots, I_n$ po dvou komaximální ideály v R. Dokaž, že pak máme izomorfismus multiplikativních grup
$$(R/(I_1 \cdots I_n))^\times \simeq (R/I_1)^\times \times \cdots \times (R/I_n)^\times.$$
4. Buď R komutativní okruh s jednotkou, který má pouze konečně mnoho ideálů. Dále předpokládejme, že průnik maximálních ideálů v R je triviální. Dokažte, že R je direktním součinem konečně mnoha těles. Uveďte příklad konečného komutativního okruhu s jednotkou, který má netriviální průnik maximálních ideálů.

Axiom výběru

1. (!) Pomocí Zornova lemmatu dokaž, že každá lineárně nezávislá podmnožina vektorového prostoru jde rozšířit na bázi. (Skripta obsahují podrobný návod.)
2. (!) Pomocí Zornova lemmatu dokaž, že každé zobrazení $f : A \to B$, které je *na* B, má pravý inverz, tj. že existuje zobrazení $g : B \to A$ takové, že $fg(x) = x$ pro všechna $x \in B$.
3. (!) Pomocí Zornova lemmatu dokaž, že každé částečné uspořádání na dané množině lze rozšířit do lineárního uspořádání. (Rozšířením uspořádání $\leq$ se rozumí uspořádání $\preccurlyeq$ na téže množině takové, že pokud $x \leq y$, pak $x \preccurlyeq y$.)
4. (*) Pomocí Zornova lemmatu dokaž, že pokud v okruhu R existuje vlastní ideál, který není konečně generovaný, pak v něm také existuje prvoideál, který není konečně generovaný.