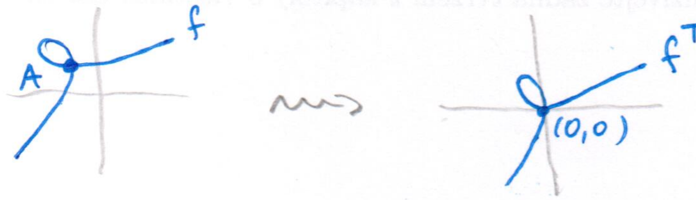
Obecný bod:

$A = (a,b) \rightsquigarrow$ translace $T(x,y) = (x+a, y+b)$

$$f^T := f(x+a, y+b) \in K[x,y]$$



… situace se posune z A do $(0,0)$, tečny pak musím posunout zpět

def: $m_A(f)$ = <u>násobnost A na f</u> := násobnost $(0,0)$ na f^T

<u>tečna</u> f v bodě $\underset{(a,b)}{A}$ ≡ přímka $u\cdot(x-a) + v\cdot(y-b) = 0$

t.ž. $ux+vy=0$ je tečna f^T v bodě $(0,0)$

<u>násobnost tečny</u> ≡ násobnost té tečny f^T z které vznikla

---

Věta: K alg. uz., $f \in K[x,y]$ křivka, $A \in V(f)$ $\Rightarrow$

(1) A je jednoduchý bod na f $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\mathcal{O}_A(f)}_{\text{zkratka za } \mathcal{O}_A(V(f))}$ je DVO

Navíc, pokud ano, tak libovolná přímka, která není tečnou v A, je generátorem ideálu $M_A(f)$.

(2) $\forall n$ dostatečně velké $\quad m_A(f) = \dim \underbrace{M_A(f)^n / M_A(f)^{n+1}}_{\text{vektorový prostor nad } K}$

(… libovolný $R \supseteq K$ je v. pr. nad K
$\Rightarrow$ lib. R/I je taky v. pr. nad K)

Důsledek: Násobnost bodu závisí pouze na $\mathcal{O}_A(f)$.

Dk: (1) ($\Rightarrow$) Bez újmy na obecnosti nechť

$A=(0,0)$ jednoduchý
tečna je y
netečna je x

? $M_A(f)=([x])$?
(a tedy $\mathcal{O}_A(f)$ je DVO)

proveď afinní změnu souřadnic tak, aby se bod A posunul do počátku
a daná tečna a netečna se pootočily do směru os y, x
... afinní transformace nemění $\Gamma(f)$, čili ani $\mathcal{O}_A(f)$ (až na $\cong$)

ve smyslu: $\mathcal{O}_A(f) \cong \mathcal{O}_{(0,0)}(f^T)$

$M_A(f) = ([x],[y])$

... protože $M_A(f) = \{ q \in \mathcal{O}_A(f) : q(0,0)=0 \}$ tj. čitatel bez abs. členu

$= \{ [x]\cdot q_1 + [y]\cdot q_2 : q_1, q_2 \in \mathcal{O}_A(f) \}$

Všimněte si, že $f_1 = cy$ pro něj. $c \in K$, $c \neq 0$ ... je to jednoduchý bod, čili jediná tečna se skrývá ve formě f_1

$\Longrightarrow$ $f = cy + $ (členy stupně aspoň 2)

$= y\cdot g - x^2 \cdot h$ pro nějaké $g, h \in K[x,y]$
$g(0,0) = c \neq 0$

$\Longrightarrow$ $yg \equiv x^2 h \pmod f$

$\Longrightarrow$ $[y] = \frac{[h]}{[g]} \cdot [x^2]$ v $\mathcal{O}_A(f)$

$\Longrightarrow$ $[y] \in ([x])$ v $\mathcal{O}_A(f)$, čili z generující množiny $M_A(f)$ ho můžu škrtnout

(1) ($\Leftarrow$) (důkaz pomocí (2))

Nechť $\mathcal{O}_A(f)$ je DVO a tedy $M_A(f) = (t)$.

Pak $M_A(f)^k = (t^k)$.

dává smysl, $t^n | q$

Uvažuj zobrazení $M_A(f)^n \longrightarrow K$:

$$q \mapsto \left(\frac{q}{t^n}\right)(A)$$

... je to homomorfismus vektorových prostorů (ne okruhů!)

... jádro $= \{ q : \left(\frac{q}{t^n}\right)(A) = 0 \} = \{ q : t^{n+1} | q \}$

$= M_A(f)^{n+1}$

$\xrightarrow{\text{1.v.o izo.}} \quad M_A(f)^n / M_A(f)^{n+1} \simeq K$, tedy dimenze 1 $\underline{\underline{\forall n}}$

$\xrightarrow{(2)} \quad m_A(f) = 1$

(2) Označ $\mathcal{O} := \mathcal{O}_A(f)$, $M := M_A(f)$

Uvažuj projekci $\varphi : \mathcal{O}/M^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}/M^n$

$$[q]_{M^{n+1}} \mapsto [q]_{M^n}$$

... je to okruhový hom. $\Rightarrow$ taky hom. vekt. prostorů

... dobře definovaný, protože $M^{n+1} \subseteq M^n$

... $\operatorname{Ker} \varphi = M^n / M^{n+1}$

$\xrightarrow{\text{věta o dim jádra a obrazu}} \quad \underbrace{\dim \operatorname{Ker}\varphi}_{M^n/M^{n+1}} + \underbrace{\dim \operatorname{Im}\varphi}_{\mathcal{O}/M^n} = \underbrace{\dim V}_{\mathcal{O}/M^{n+1}}$

$\rightsquigarrow$ CÍL: $\forall n$ dost velké $m_A(f) = \dim \mathcal{O}/M^{n+1} - \dim \mathcal{O}/M^n$?

Dokážeme, že $\boxed{\dim \mathcal{O}/_{M^n} = n\cdot m_A(f) + s}$ $\quad \forall n \geq m_A(f)$

pro jisté s (tj. dost velké)

☉ $\Rightarrow$ platí CÍL $\left(\underbrace{(n+1)\, m_A(f)+s}_{\dim \mathcal{O}/_{M^{n+1}}} \; \underbrace{- \, n\, m_A(f) - s}_{\dim \mathcal{O}/_{M^n}} = m_A(f) \right)$

Bez újmy na obecnosti opět nechť $A=(0,0)$.

$\Rightarrow \quad M = ([x],[y])$, $\quad M^n = ([x],[y])^n$ ... ideály v $\mathcal{O}$

označ $\quad I = (x,y)$ ... ideál v $K[x,y]$

$$\Rightarrow \quad K[x,y]/_{(I^n,f)} \simeq \mathcal{O}_{(0,0)}(\mathbb{A}^2)/_{(I^n,f)\,\mathcal{O}_{(0,0)}(\mathbb{A}^2)} \simeq \mathcal{O}/_{M^n}$$

Věta z $\boxed{18}$

.. lze použít, protože

$V((I^n,f)) = \{(0,0)\} = V(I)$

z 1. věty o izo. aplikované na

$\mathcal{O}_A(\mathbb{A}^2) \longrightarrow \mathcal{O}/_{M^n}$

$\frac{h}{g} \mapsto \left[\frac{[h]}{[g]}\right]_{M^n}$

zlomek $\frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}$ ... v A je $\neq 0$

⇝ prvek $K(f)$ ... $\frac{[\text{poly}]}{[\text{poly}]}$ ... v A je $\neq 0$

čili je to prvek $\mathcal{O}_A(f) = \mathcal{O}$

⇝ prvek $\mathcal{O}_A(f)/_{M^n}$ ... $\left[\frac{[\text{poly}]}{[\text{poly}]}\right]_{M^n}$

... je to dobře def.

... je to okruhový hom. na

... jádro $= (I^n, f)\, \mathcal{O}_A(\mathbb{A}^2)$

$\left[\frac{[h]}{[g]}\right] = [0]$ v $\mathcal{O}/_{M^n}$ $\iff$ $\frac{[h]}{[g]} \in M^n$ v $\mathcal{O}$, $\quad M^n = ([x],[y])^n$

$\iff \frac{[h]}{[g]} = \sum v_i [u_i]$ kde $v_i \in \mathcal{O}$, $u_i = x^k y^l$ pro $k+l \geq n$

$\iff \frac{h}{g} \equiv \sum s_i u_i \pmod{f}$ $\quad \iff \frac{h}{g} \equiv 0 \pmod{f, I^n}$

$\rightsquigarrow$ úlohu jsme převedli na polynomy, což je snazší !!

Tj., chceme dokázat, že

$$\boxed{\dim K[x,y]/(I^n, f) = n \cdot m_A(f) + s}$$

$\forall n \geq m_A(f)$

označ $m := m_A(f)$, nechť $n \geq m$

vezmi $\varphi: K[x,y]/I^n \longrightarrow K[x,y]/(I^n, f)$ ... okruhový hom.

$[g]_{I^n} \mapsto [g]_{(I^n, f)}$ ... na

$\psi: K[x,y]/I^{n-m} \longrightarrow K[x,y]/I^n$ ... hom. vekt. prostorů (ne okruhů)

$[g]_{I^{n-m}} \mapsto [fg]_{I^n}$

$\overset{\text{!!!}}{\odot}$ dobře def. & prosté

? $g \in I^{n-m} \iff fg \in I^n$?

ANO, díky násobnosti bodu $A = (0,0)$, tj. protože $f \in I^m$

$\overset{\text{!!!}}{\odot}$ $\operatorname{Im} \psi = \operatorname{Ker} \varphi$

... $\varphi([g]) = 0 \iff f | g$

$\iff [g] \in \operatorname{Im} \psi$

$\Longrightarrow$ máme krátkou exaktní posloupnost vekt. prostorů

$$0 \longrightarrow K[x,y]/I^{n-m} \xrightarrow{\psi} K[x,y]/I^n \xrightarrow{\varphi} K[x,y]/(I^n, f) \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\dim K[x,y]/I^{n-m}}_{\frac{(n-m)(n-m+1)}{2}} + \dim K[x,y]/(I^n, f) = \underbrace{\dim K[x,y]/I^n}_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$\overset{\text{!!!}}{\odot}$ báze je $[x^i y^j] : i+j < n$

$$\Longrightarrow \dim K[x,y]/(I^n, f) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-m)(n-m+1)}{2} = n \cdot m + \underbrace{\tfrac{1}{2} m(1-m)}_{=: s}$$

(nezávisí na n) $\square$