III. LOKÁLNÍ VLASTNOSTI KŘIVEK V ROVINĚ

navždy: dim = 2, $K[x,y]$

většinou: K alg. uzavřené

terminologie: křivka a polynom je to samé

(formálně: K alg. uz. $\xrightarrow{\text{Gal. koresp.}}$ jzn. korespondence

křivky $\leftrightarrow$ poly. bez násobných činitelů až na $\parallel$)

def: $f = f_1^{k_1} \cdots f_n^{k_n}$ ... $f_1, \dots, f_n$ komponenty křivky f

$k_1, \dots, k_n$ jejich násobnosti

def: A je jednoduchý bod na f $\equiv$ $f(A) = 0$ & $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(A) \neq 0 \text{ nebo } \frac{\partial f}{\partial y}(A) \neq 0}$

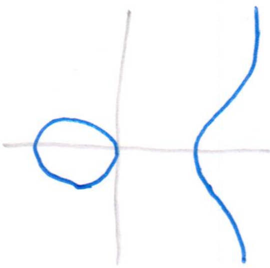
jinak: násobný, singulární

def: tečna křivky f v jednoduchém bodě $A = (a,b)$:

přímka $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot (y-b) = 0}$

☺ přímka prochází bodem A a má směrnici $-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(A)}{\frac{\partial f}{\partial y}(A)} = \underbrace{\dfrac{dy}{dx}(A)}_{\text{implicitní derivace křivky } f \text{ v } A}$

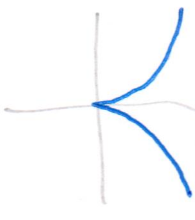
Př.: ① $f = y^2 - x^3 + x$



$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ } všechny body jednod.

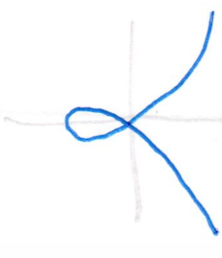
směrnice tečny v $A = (a,b)$ je $\dfrac{3a^2 - 1}{2b}$

② $f = y^2 - x^3$



$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ } $(0,0)$ je singulární bod

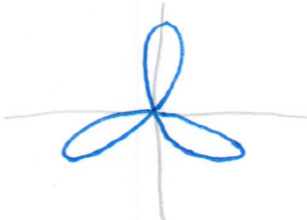
③ $f = y^2 - x^3 - x^2$



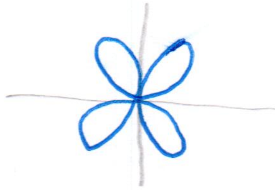
$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 - 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ } $(0,0)$ je singulární bod

$\rightsquigarrow$ Idea: v jednoduchých bodech funguje kalkulus
v singulární bodech je potřeba algebra

Př.: (4) $f = (x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3$



(5) $f = (x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2$



v obou případech: (0,0) je singulární

ve všech uvedených příkladech členy nejnižšího stupně určují tečny v bodě (0,0) !

... (1) ... člen x, tečna $x=0$ (svislá přímka)

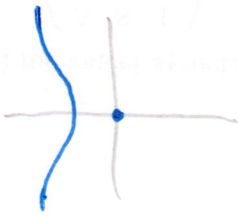
... (2) ... člen y^2, tečna $y=0$ jakoby dvakrát

... (3) ... členy y^2-x^2, tečny $y-x$, $y+x$

... (4) ... členy $3x^2y - y^3 = y(\sqrt{3}x-y)(\sqrt{3}x+y)$, tři tečny s těmito rovnicemi

... (5) ... členy $-4x^2y^2$, tečny x, y každá dvakrát

Př.: (6) $f = y^2 + x^3 + x^2$



... (0,0) singulární
... členy nejnižšího stupně x^2+y^2 nejde rozložit, nemá tečnu v (0,0)

def: forma stupně i $\equiv$ homogenní polynom st. i
$\equiv$ všechny členy mají stupeň i

značení: $f \in K[\bar{x}]$, $\deg f = n$ $\rightsquigarrow$ $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$, kde f_i je forma st. i
(tj. obsahuje členy f st. i)

absolutní člen lineární členy ... lineární forma atd.

<u>Tvrzení</u>: K alg. uz., $f \in K[x,y]$ forma st. n

$$\Rightarrow f \parallel y^k \cdot \prod_{i=1}^{n-k} (x - \lambda_i y) \quad \text{pro nějaká } k, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$$

<u>Dk</u>: nechť $f = y^k \cdot g(x,y)$ t.ž. $y \nmid g(x,y)$, tj. $g(x,0) \neq 0$

$\Rightarrow g(x,1) = \prod (x - \lambda_i)$ díky alg. uz. (Zákl. v. algebry)

$\Rightarrow g(x,y) = \prod (x - \lambda_i y)$

□

<u>Bod $(0,0)$</u>:

<u>def</u>: <u>násobnost</u> $(0,0)$ na $f \equiv m_{(0,0)}(f) :=$ nejmenší m t.ž. $f_m \neq 0$

👁 $m = 0 \iff (0,0) \notin V(f)$

👁 $m = 1 \iff (0,0) \in V(f)$ & aspoň 1 parciální derivace $\neq 0$

$\iff (0,0)$ je jednoduchý bod

<u>Navíc</u>: 👁 pak f_1 je tečna f v $(0,0)$

... $f_1 = ax + by \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = (a + \text{členy st.} \geq 1)(0,0) = a$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = (b + \text{—''—})(0,0) = b$

<u>def</u>: $(0,0)$ násobnosti $m \geq 1$ na f ⇝ vezmi ired. rozklad

$f_m \parallel l_1^{r_1} \cdots l_k^{r_k} q_1^{s_1} \cdots q_e^{s_e}$

kde l_i lineární, q_i st. > 1

$l_1, \dots, l_k$ se nazývají <u>tečny</u> v bodě $(0,0)$

$r_1, \dots, r_k$ jsou jejich <u>násobnosti</u>

👁 pro $m = 1$ je to kompatibilní s defcí z diferenciálního kalkulu

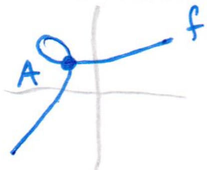
👁 K alg. uz. $\Rightarrow$ bod násobnosti m má přesně m tečen včetně násobností

‖‖ důsledek Tvrzení nahoře

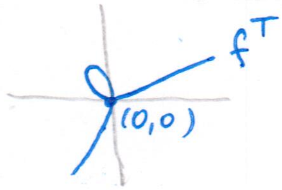
Obecný bod:

$A=(a,b) \rightsquigarrow$ translace $T(x,y)=(x+a,\ y+b)$

$$f^T := f(x+a,\ y+b) \in K[x,y]$$



$\rightsquigarrow$



... situace se posune z A do (0,0), tečny pak musím posunout zpět

def: $m_A(f)$ = násobnost A na f $:=$ násobnost (0,0) na f^T

tečna f v bodě $A \underset{=}{} (a,b)$ $\equiv$ přímka $u\cdot(x-a)+v\cdot(y-b)=0$ t.ž. $ux+vy=0$ je tečna f^T v bodě (0,0)

násobnost tečny $\equiv$ násobnost té tečny f^T z které vznikla

---

Věta: K alg. uz., $f \in K[x,y]$ křivka, $A \in V(f)$ $\Longrightarrow$

(1) A je jednoduchý bod na f $\iff$ $\underbrace{\mathcal{O}_A(f)}_{\text{zkratka za } \mathcal{O}_A(V(f))}$ je DVO

Navíc, pokud ano, tak libovolná přímka, která není tečnou v A, je generátorem ideálu $M_A(f)$.

(2) $\forall n$ dostatečně velké $m_A(f) = \dim \underbrace{M_A(f)^n / M_A(f)^{n+1}}_{\text{vektorový prostor nad } K}$

(... libovolný $R \supseteq K$ je v. pr. nad K $\Rightarrow$ lib. R/I je taky v. pr. nad K)

Důsledek: Násobnost bodu závisí pouze na $\mathcal{O}_A(f)$.