tj. $f,g \in K[x,y,z]$ formy

V. BÉZOUTOVA VĚTA

f,g křivky v $\mathbb{P}^2$ stupně m,n bez společné komponenty

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{A \in f\cap g} I_A(f\cap g) = m\cdot n}$$

Připomeňme definici křižících čísel:

$$\underbrace{I_A(f\cap g)}_{\text{proj}} = \underbrace{I_{(a,b)}(f_{*i}, g_{*i})}_{\text{af}} = \dim \mathcal{O}_{(a,b)}(\mathbb{A}^2)/(f_{*i}, g_{*i})$$

kde $A = \begin{cases} [a:b:1] & \dots\ i=3 \\ [a:1:b] & \dots\ i=2 \\ [1:a:b] & \dots\ i=1 \end{cases}$

Značení: $f \in K[x,y,z] \rightsquigarrow f_* := f(x,y,1)$ (... std. značení)

$f_+ := f(x,y,0)$ (... pro účely tohoto důkazu)

Důkaz: $\ddot{\odot}$ $f\cap g$ je konečný

... pro afinní křivky bylo na začátku kurzu

... proj. případ: $f_* \cap g_* \rightsquigarrow$ kon. mnoho afinních bodů

$f_+ \cap g_+ \rightsquigarrow$ kon. mnoho bodů v nek.

$\rightsquigarrow$ proveď projektivní změnu souřadnic tak, aby všechny body v průniku byly afinní

... jak? Zvol přímku, na které žádný neleží a definuj proj. změnu souřadnic tak, aby se tato přímka prohodila s přímkou v nekonečnu.

$$\rightsquigarrow \sum_{A\in f\cap g}^{\text{proj.}} I_A(f\cap g) = \sum_{A\in f^T\cap g^T}^{\text{proj}} I_A(f^T\cap g^T) = \sum_{A\in f_*^T\cap g_*^T}^{\text{af.}} I_A(f_*^T\cap g_*^T)$$

změna souřadnic nemění křižící čísla odpovídajících bodů

všechny $A=[a:b:1]$ $\rightsquigarrow$ použiju $()_{*3}$

$\Vert$ Věta o kř. č. bod (1)

$$\dim K[x,y]/(f_*^T, g_*^T)$$

Odteď BÚNO f, g se nekříží v nekonečnu.

Zbývá dokázat, že $\dim K[x,y]/(f_*, g_*) = m \cdot n$.

Označ: $R = K[x,y,z]$ $\quad R_d :=$ formy st. d

$\Gamma = R/(f,g)$ $\quad \Gamma_d := [\text{formy}]$ st. d

$\Gamma_* = K[x,y]/(f_*, g_*)$

Plán: ① $\dim \Gamma_d = m \cdot n \quad \forall d \geq m+n$

② $\Gamma_d \longrightarrow \Gamma_{d+1}$ je lineární zobrazení, prosté

$[h] \mapsto [z \cdot h]$

👁 díky ① to musí být izom. $\forall d \geq m+n$

③ $\dim \Gamma_* = \dim \Gamma_d \quad \forall d \geq m+n$

$\xRightarrow{① \& ③}$ máme Větu dokázanou

V důkazu ③ budeme potřebovat následující důsledek:

$[h_1], \dots, [h_{mn}]$ báze $\Gamma_d \Longrightarrow [z^\delta h_1], \dots, [z^\delta h_{mn}]$ je lineárně nezávislá psl. v $\Gamma_{d+\delta}$

& je to báze pokud $d+\delta \geq m+n$

Cv [snadná kombinatorika]

$$\dim R_d = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$$

Řešení: formy st. d mají členy $x^i y^j z^{d-i-j}$, $0 \leq i+j \leq d$

těch je celkem $\sum_{i=0}^{d} \# \underbrace{\text{přípustných } j\text{-ček}}_{0,1,\dots,d-i} = (d+1) + d + \dots + 2 + 1$

$$= (d+1)(d+2)/2$$

Důkaz (1):

$$0 \longrightarrow \overset{\text{poly}}{R} \xrightarrow{\ \psi\ } \overset{(\text{poly} \times \text{poly})}{R\times R} \xrightarrow{\ \varphi\ } \overset{\text{poly}}{R} \xrightarrow{\ \pi\ } \overset{\text{poly}/(f,g)}{\Gamma} \longrightarrow 0$$

$$h \longmapsto (gh, -fh)$$

$$(u,v) \longmapsto fu+gv$$

$$h \longmapsto [h]$$

(i) jsou to všechno lineární zobrazení

(ii) je to exaktní posloupnost

... ψ prosté, π na ✓

... $h \in \operatorname{Ker}\pi \iff h \in (f,g) \iff h = fu+gv$ pro něj. u,v

... $(u,v) \in \operatorname{Ker}\varphi \iff fu = -gv \overset{f,g \text{ nesoud.}}{\iff} u = gh,\ v=-fh$ pro něj. h

(iii) celé to lze zúžit na formy daného stupně $d \geq m+n$:

$$0 \longrightarrow R_{d-m-n} \xrightarrow{\ \psi\ } R_{d-m} \times R_{d-n} \xrightarrow{\ \varphi\ } R_d \xrightarrow{\ \pi\ } \Gamma_d \longrightarrow 0$$

V. o dim Ker, Im $\Longrightarrow$

- $\dim R_d = \underbrace{\dim \operatorname{Ker}\pi}_{\boxed{\dim \operatorname{Im}\varphi}} + \underbrace{\dim \operatorname{Im}\pi}_{\dim \Gamma_d}$ ... to chci spočítat

- $\underbrace{\dim R_{d-m} \times R_{d-n}}_{\dim R_{d-m} + \dim R_{d-n}} = \underbrace{\dim \operatorname{Ker}\varphi}_{= \dim \operatorname{Im}\psi = \dim R_{d-m-n}} + \boxed{\dim \operatorname{Im}\varphi}$

$$\Longrightarrow \dim \Gamma_d = r_d - (r_{d-m} + r_{d-n} - r_{d-m-n})$$

kde $r_d = \dim R_d \overset{\text{Cv}}{=} \dfrac{(d+1)(d+2)}{2}$

$$\Longrightarrow \dim \Gamma_d = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \frac{(d-m+1)(d-m+2)}{2} - \frac{(d-n+1)(d-n+2)}{2} + \frac{(d-m-n+1)(d-m-n+2)}{2}$$

$$= \ \dots \ = m \cdot n$$

Důkaz (2): $\Gamma_d \to \Gamma_{d+1}$ ← formy st. $d\,(+1)$ modulo (f,g)

$[h] \mapsto [z\cdot h]$

... je to zřejmě dobře def. lineární zobrazení

? **prosté**? nechť $[z\cdot h]=[0]$, tj. $z\cdot h \in (f,g)$

$\Rightarrow$ $\boxed{z\cdot h = uf+vg}$ pro něj. $u,v\in R$

CHCI: ? $\boxed{h = u'f+v'g}$ pro něj. $u',v'\in R$?

$\Rightarrow$ $h\in(f,g)$, čili $[h]=[0]$

... $zh = uf+vg \xrightarrow{(\,)_+} 0=(zh)_+ = \boxed{u_+f_+ + v_+g_+}$

... f,g nesoudělné $\Rightarrow$ f_+,g_+ nesoudělné

$\Rightarrow$ $v_+ = f_+\cdot w$, $u_+ = -g_+w$ pro nějž. $w\in R$

$u' := u+wg$, $v' := v-wf$

👁 $u'_+=0$, $v'_+=0$, čili $z\,|\,u'$, $z\,|\,v'$ v R

$\Rightarrow$ $u'=z\cdot u''$, $v'=z\cdot v''$ pro nějž. $u'',v''\in R$

$\Rightarrow$ $zh = uf+vg \underset{\text{viz defce } u',v'}{=} u'f+v'g = zu''f+zv''g$

$\Rightarrow$ $h = u''f+v''g$

Důkaz ③ :

Buď $h_1, \dots, h_{mn}$ formy st. $\overset{\overset{m+n}{\shortparallel}}{d}$ t.ž. $[h_1], \dots, [h_{mn}]$ je báze Γ_d

(ve smyslu v.pr.)

formy modulo (f,g)

Dokážeme, že $[h_{1*}], \dots, [h_{mn*}]$ je báze Γ_*

polynomy modulo (f_*, g_*) z $K[x,y]$

? generují Γ_* ?

Buď $[h] \in \Gamma_*$, $\deg h = k$

$\rightsquigarrow$ h^* je forma stupně k

$l := \begin{cases} 0 & \text{pokud } k \geq d \\ d-k & \text{pokud } k < d \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ uvažuj formu $z^l h^*$

... má stupeň $d+\sigma \geq d \geq m+n$

$$\overset{②}{\Longrightarrow} \quad [z^l h^*] = \sum \lambda_i [z^\sigma h_i] \quad \text{v } \Gamma_{d+\sigma}$$

rovnost modulo (f,g)

$$\Longrightarrow \quad z^l h^* = \sum \lambda_i z^\sigma h_i + uf + vg \quad \text{pro nějak. } u,v \in R$$

$$\overset{(\,)_*}{\Longrightarrow} \quad h = (h^*)_* = \sum \lambda_i h_{i*} + u_* f_* + v_* g_*$$

$$\Longrightarrow \quad [h] = \sum \lambda_i [h_{i*}] \quad \text{v } \Gamma_*$$

? lin. nezáv. ?

Nechť $\sum \lambda_i [h_{i*}] = [0]$ v Γ_*

$$\Longrightarrow \quad \sum \lambda_i h_{i*} = u f_* + v g_* \quad \text{pro nějak. } u,v \in K[x,y]$$

tohle si pořádně rozmyslete (viz vztah $(f+g)_*$ vs. f_*, g_*)

$$\Longrightarrow \quad \exists r,s,t \in \mathbb{N} \quad z^r \cdot \sum \lambda_i h_i = \underbrace{u^* z^s f + v^* z^t g}_{\in (f,g)}$$

$$\Longrightarrow \quad [z^r \cdot \sum \lambda_i h_i] = [0] \quad \text{v } \Gamma_{d+r}$$

$$\shortparallel$$

$$\sum \lambda_i [z^r h_i] \quad \overset{②}{\Longrightarrow} \quad \forall i \; \lambda_i = 0$$

□