Okruhy poly. / racionální funkcí pro projektivní variety

Buď $V \subseteq \mathbb{P}^n$ projektivní varieta, tj. $I_p(V)$ je prvoideál:

homogenní okruh souřadnic pro V: $\Gamma_h(V) := K[x_1, \dots, x_{n+1}] / I_p(V)$

ⓞ je to obor integrity

homogenní těleso funkcí pro V: $K_h(V) :=$ podílové těleso $\Gamma_h(V)$

! funkční těleso pro V: $\boxed{K(V) := \{ q \in K_h(V) : q = \frac{[f]}{[g]} \text{ kde } f, g \text{ jsou formy stejného stupně} \}}$

ⓞ je to podtěleso $K_h(V)$

lokalizace v bodě A: $\mathcal{O}_A(V) := \{ q \in K(V) : q \text{ je definovaná v } A \}$

///

$\exists f, g$ formy stejného stupně t.ž.

$q = \frac{[f]}{[g]}$ & $g(A) \neq 0$

Proč tak složitě?

! $f(A)$, $q(A)$ není obecně dobře definované

ALE: dává to smysl pro f formu

q podíl dvou forem stejného stupně t.ž. ~~…~~ jmenovatel $\neq 0$

↪ tj. $q \in \mathcal{O}_A(V)$

def: $q \in \mathcal{O}_A(V)$, $q = \frac{[f]}{[g]}$, f, g stejného stupně, $g(A) \neq 0$

$$\Rightarrow \quad q(A) := \frac{f(A)}{g(A)}$$

ⓞ nezáleží na volbě f, g

ⓞ je to invariantní vůči λ-násobku (protože stejný stupeň)

$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{O}_A(V) \le K(V) \le K_h(V)$$

(pouze formální zlomky, ne funkce)

racionální funkce na V (mohou mít póly)

racionální funkce na V definované v bodě A

Ö $\mathcal{O}_A(V)$ je lokální okruh

$$M_A(V) = \{ q \in \mathcal{O}_A(V) : q(A) = 0 \} = \left\{ q = \frac{[f]}{[g]} \in K(V) : \begin{array}{l} f(A)=0 \\ g(A)\neq 0 \end{array} \right\}$$

(max. ideál v $\mathcal{O}_A(V)$)

(tj. neinvertibilní prvky)

<u>Pozor!</u> $\Gamma_h(V) \not\subseteq K(V)$

triv. zlomky $\frac{\text{st. } n}{\text{st. } 0}$ — "rac. fce stupně 0"

<u>Lemma</u>: Každý $[f] \in \Gamma_h(V)$ lze napsat <u>jednoznačně</u> jako součet forem různých stupňů.

<u>Dk</u>: ($\exists$) $f = \sum f_i \Rightarrow [f] = \sum [f_i]$

i-tá forma pro f

(jedn.) $[f] = \sum [f_i] = \sum [g_i]$

$$\Rightarrow [\sum (f_i - g_i)] = 0 \Rightarrow \sum (f_i - g_i) \in \underbrace{I_p(V)}_{\text{homog. ideál}}$$

$$\Rightarrow \forall i \ \ f_i - g_i \in I_p(V)$$

čili $[f_i] = [g_i] \ \forall i$ $\square$

Projektivní změna souřadnic

def.: $T: \mathbb{A}^{n+1} \to \mathbb{A}^{n+1}$ lineární zobr., bijektivní

$(a_1, \dots, a_{n+1}) \mapsto (T_1(\bar{a}), \dots, T_{n+1}(\bar{a}))$

$\Downarrow$

$T: \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ ... projektivní změna souřadnic

$[a_1 : \dots : a_{n+1}] \mapsto [T_1(\bar{a}) : \dots : T_{n+1}(\bar{a})]$

$\odot$ dobře definované, protože T_i jsou lineární formy
(↳ tj. stupně 1)

def: $V \subseteq \mathbb{P}^n$ alg. mna $\rightsquigarrow$ $V^T := T^{-1}(V) = \{A : T(A) \in V\}$

$\odot$ $V = V_P(f_1, \dots, f_k) \Rightarrow V^T = V_P(f_1^T, \dots, f_k^T)$

kde $f^T(\bar{x}) = f(T_1(\bar{x}), \dots, T_{n+1}(\bar{x}))$

$\odot$ f forma st. m $\Rightarrow$ f^T forma st. m, protože T_i tady formy st. 1

$\odot$ V ireducibilní $\Leftrightarrow$ V^T ireducibilní

$\odot$ $\Gamma_h(V) \simeq \Gamma_h(V^T)$, a tedy také $K(V) \simeq K(V^T)$

$[f] \mapsto [f^T]$

$\mathcal{O}_A(V) \simeq \mathcal{O}_B(V^T)$
kde $B = T^{-1}(A)$

... prosté & dobře def.:

$[f] = 0 \Leftrightarrow f \in I_P(V) \Leftrightarrow f^T \in I_P(V^T) \Leftrightarrow [f^T] = 0$

... hom., na je zřejmé

$\Longrightarrow$ Jak uvidíme, z toho plyne, že projektivní změna souřadnic nemění násobnosti a křížící čísla odpovídajících bodů

Vztah $K(V)$ (afinní) a $K(V^*)$ (projektivní):

$u = [f] \in \Gamma_h(V^*)$ forma st. d $\rightsquigarrow$ $u_* := [f_*] \in \Gamma(V)$

nezávisí na volbě f

$\rightsquigarrow$ $\alpha : K(V^*) \simeq K(V)$

$q = \frac{u}{v} \mapsto q_* := \frac{u_*}{v_*}$ je to K-izomorfismus těles

$\rightsquigarrow$ $\alpha \restriction_{\mathcal{O}_A(V^*)} : \mathcal{O}_A(V^*) \simeq \mathcal{O}_A(V)$ je to dobře def. izo. okruhů

$q \mapsto q_*$

$\forall A \in (V^*)_* = V$ ... q def. v $A \in (V^*)_*$ $\Downarrow$ q_* def v $A \in V$

$\Longrightarrow$ otázky o lokální okruzích v projektivním případě lze převést na afinní případ, akorát pozor na body v nekon.

Násobnost a křížicí číslo

def: f křivka v $\mathbb{P}^2$, $A \in \mathbb{P}^2$

- $A = [a:b:1]$ $\rightsquigarrow$ $m_A(f) := m_{(a,b)}(f_{*3})$
- $A = [a:1:b]$ $\rightsquigarrow$ $m_A(f) := m_{(a,b)}(f_{*2})$
- $A = [1:a:b]$ $\rightsquigarrow$ $m_A(f) := m_{(a,b)}(f_{*1})$

(proj. násobnost $m_A(f)$, afinní násobnost $m_{(a,b)}$)

! je to dobře definované, tj. nezáleží, kterou souřadnici vezmu 1

... protože $\mathcal{O}_A(f) \simeq \mathcal{O}_{(a,b)}(f_{*i})$ pro libovolné i

& měli jsme Větu, že násobnost závisí pouze na $\mathcal{O}_{\dots}(\dots)$

def: analogicky: $I_A(f \cap g) := I_{(a,b)}(f_{*i} \cap g_{*i})$

A ... má 1 na i-té pozici

dobře def., protože to závisí pouze na $\mathcal{O}_{\dots}(\mathbb{A}^2) / (\dots, \dots)$