Cvičení 2

1. Najděte příklad spočetného systému algebraických množin, jehož sjednocení není algebraická množina.
2. Ať C je afinní algebraická křivka v $\mathbb{A}^2(K)$, tj. $C = V(f),\ f \in K[x, y]$. Ať L je přímka v $\mathbb{A}^2(K),\ L \nsubseteq C$. Potom $L \cap C$ je konečná množina s nejvýše $deg(f)$ body.
3. Ať $V \subseteq \mathbb{A}^n(K),\ W \subseteq A^m(K)$ jsou algebraické množiny, potom $V \times W \subseteq \mathbb{A}^{n+m}(K)$ je algebraická množina.
4. Pro algebraické množiny $V, W \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ platí $V = W \iff I(V) = I(W)$.
5. Ať $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ je algebraická množina.
   (a) Ať $P \in \mathbb{A}^n(K),\ P \notin V$. Potom $\exists f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ takový, že $f(Q) = 0\ \forall Q \in V$ a $f(P) = 1$.
   (b) Ať $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{A}^n(K)$ jsou různé body, $\forall i : P_i \notin V$. Potom $\exists f_1, \ldots, f_r \in I(V)$, že $f_i(P_j) = 0$ pokud $i \neq j$ a $f_i(P_j) = 1$ pokud $i = j$.
   (c) Ať $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{A}^n(K)$ jsou různé body, $\forall i : P_i \notin V$. Mějme $a_{ij} \in K\ \forall 1 <= i, j <= r$. Pak existují $g_1, \ldots, g_r \in I(V)$ takové, že $g_i(P_j) = a_{ij}$.
6. Ať $X \subseteq \mathbb{A}^n(K)$. Ukažte, že $I(X)$ je radikálový ideál.
7. Ať $I = (x^2 + 1) \subseteq \mathbb{R}[x]$. Ukažte, že I je radikálový ideál, ale neexistuje $X \in \mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ že $I = I(X)$.
8. Ať $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$, pak $V(I) = V(\sqrt{I}))$ a $\sqrt{I} \subseteq I(V(I))$.