Kapitola 1

Taylorův polynom

Definice 1.1 *Nechť má funkce f vlastní derivaci $f(a)$ v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak přímku popsanou rovnicí $y(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ nazýváme tečnou grafu funkce f v bodě a,*

Poznamenejme, že tečna je v jistém smyslu nejlepší lineární aproximace funkce f v daném bodě. Uvažujme nyní takovou funkci f, která má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní první i druhou derivaci $f'(a)$ a $f''(a)$ a zkusme najít polynom druhého stupně $P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ tak, aby platily rovnosti $f(a) = P_2(a)$, $f'(a) = P_2'(a)$ a $f''(a) = P_2''(a)$, tedy aby polynom $P_2(x)$ aproximoval funkci f "lépe" než tečna $y(x)$. Dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} f(a) &= c_0 + c_1 a + c_2 a^2 \\ f'(a) &= c_1 + 2c_2 a \\ f''(a) &= 2c_2, \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{f''(a)}{2} \\ c_1 &= f'(a) - f''(a)a \\ c_0 &= f(a) - (f'(a)a - f''(a)a^2) - \frac{f''(a)}{2}a^2. \end{aligned}$$

Hledaný polynom $P_2(x)$ má tedy tvar

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \\
&= f(a) - (f'(a)a - f''(a)a^2) - \frac{f''(a)}{2}a^2 + (f'(a) - f''(a)a)x + \frac{f''(a)}{2}x^2 \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(a^2 - \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2}) \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.
\end{aligned}$$

Povšimněme si, že pokud bychom polynom $P_2(x)$ hledali od začátku ve tvaru $P_2(x) = d_0 + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2$, pak by se celý výpočet zjednodušil. Dále si povšimněme, že lineární část polynomu $P_2(x)$ je totožná s rovnicí tečny $y(x)$.

Příklad 1.1 *Uvažujme funkci* $f(x) = \ln x + 1$ *a bod* $a = 1$. *Pak* $f'(x) = \frac{1}{x}$ *a* $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, *tedy* $f(a) = 1, f'(a) = 1$ *a* $f''(a) = -1$. *Dostaneme tedy polynom* $P_2(a) = 1 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$. *Všimněme si, že*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x-1)^2} &= \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1 - (1 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2)}{(x-1)^2} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2}{(x-1)^2} \\
&\overset{l'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1 + (x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1-x}{x} + (x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{-1}{x} + 1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

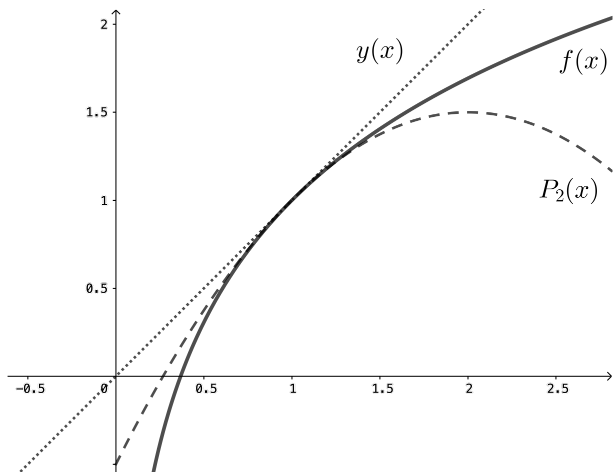
Tedy $\lim_{x\to a} \frac{|f(x) - P_2(x)|}{|x-a|^2} = 0$. *Graf funkce* $f(x)$ *i polynomu* $P_2(x)$ *je na obrázku 1.*

Otázkou je, zda obecně pro funkci $f(x)$, která má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace až do řádu $n \in \mathbb{N}$ (včetně) existuje polynom $P(x)$ takový, že $f(a) = P(a)$ a $f^{(i)}(a) = P^{(i)}(a),\ i = 1, ..., n$, a zda pro tento polynom platí $\lim_{x\to a} \frac{|f(x)-P(x)|}{|x-a|^n} = 0$. Připomeňme, že $\lim_{x\to a} \frac{|f(x)-P(x)|}{|x-a|^n} = 0 \Leftrightarrow (f(x) - P(x)) = o(x-a)^n$.

Definice 1.2 *Nechť* $f(x)$ *je reálná funkce, která má v bodě* $a \in \mathbb{R}$ *vlastní derivace až do řádu* $n \in \mathbb{N}$ *(včetně). Pak polynom* $T_n^{f,a}(x)$ *definovaný předpisem*

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

nazýváme Taylorovým polynomem funkce f *v bodě* a *řádu* n.



Obrázek 1.1:
Plná čára znázorňuje graf funkce $f(x) = \ln x + 1$, tečkovaně je vyznačen graf tečny $y(x) = 1 - (x-1) = x$ a čárkovaně graf polynomu $P_2(x) = 1 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$.

Příklad 1.2 *Nechť $f(x) = e^x$ a $a = 0$, pak $f^{(i)}(x) = e^x$, $i = 1, 2, ...$, a tedy $f^{(i)}(a) = 1$. Taylorův polynom funkce $f(x) = e^x$ v bodě $a = 0$ řádu n má tedy tvar*

$$T_n^{e^x,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}.$$

Věta 1.1 (Peanova) *Nechť má funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace do řádu n včetně. Potom existuje právě jeden polynom $P_n(x)$ stupně nejvýše n takový, že platí*

$$f(x) - P_n(x) = o((x-a)^n).$$

Tento polynom je Taylorovým polynomem funkce f v bodě a řádu n, tedy $P_n(x) = T_n^{f,a}(x)$.

Před důkazem Peanovy věty si dokážeme následující pomocná lemmata.

Lemma 1.2 *Nechť f a g mají vlastní derivace v bodě $a \in \mathbb{R}$ až do řádu n včetně. Je-li $f^{(i)}(a) = g^{(i)}(a) = 0$ pro $i = 0, 1, ..., n-1$ a $g^{(n)}(a) \neq 0$, pak je $g(x)$ nenulová na nějakém okolí $U^*(a)$ a*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Důkaz Indukcí.

I. Nechť $n = 1$, pak $g(x) \neq 0$ na nějakém $U^*(a)$ (jelikož je g ryze monotónní v a). Tedy

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

II. Nechť platí tvrzení pro n, dokažme jej indukcí pro $n+1$. Označme $F = f'$ a $G = g'$, pak F a G splňují předpoklady lemmatu 1.2 pro n, tedy

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(a)}$$

a $G = g'$ je nenulová na nějakém okolí $U^*(a)$. Tedy $g \neq 0$ na nějakém okolí bodu a. Pak užitím l'Hospitalovy věty dostaneme

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(s)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(a)} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{g^{(n+1)}(a)}.$$

□

Lemma 1.3 *Nechť f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci do řádu n (včetně), pak*

i)

$$f(x) = o((x-a)^n) \Leftrightarrow f^{(k)}(a) = 0,\ k = 0, 1, ..., n,$$

ii)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow f^{(k)}(a) = 0,\ k = 0, 1, ..., n-1,\ \ a\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Důkaz

($\Leftarrow$) Pro $g(x) = (x-a)^n$ a f platí předpoklady lemmatu 1.2, tudíž

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Tedy $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ pro $f^{(n)} = 0$ a $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pro $f^{(n)}(a) \neq 0$.

(⇒) Dokažme nyní opačné implikace (sporem). Nechť existuje $m < n$ tak, že $f^{(i)}(a) = 0$ pro $i = 0, 1, ..., m-1$ a $f^{(m)}(a) \neq 0$. Pak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^m} \frac{1}{(x-a)^{n-m}}$$

je nevlastní, jelikož $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^m} \neq 0$ dle první části důkazu a $\frac{1}{(x-a)^{n-m}}$ nemá vlastní limitu. Tedy z předpokladů vyplývá, že $f^{(i)}(a) = 0$ pro $i = 0, 1, ..., n-1$. Nyní stačí aplikovat lemma 1.2:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Tedy $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} n! = f^{(n)}(a)$.

□

Lemma 1.4 *Nechť $a \in \mathbb{R}$, pak lze každý polynom $P_n(x)$ stupně nejvýše n zapsat jediným způsobem ve tvaru*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k,$$

přičemž $c_k = \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}$.

Důkaz Pro $n = 0$ je existence takového zápisu zřejmá. Nechť lze libovolný polynom stupně n zapsat ve zmíněném tvaru, pak

$$P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k x^k = c_{n+1}(x-a)^{n+1} - c_{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^k (-a)^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} c_k x^k,$$

tedy $P_{n+1}(x)$ lze také zapsat v požadovaném tvaru. Nechť $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$, pak $P_n^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} c_k (x-a)^{(k-j)} \frac{k!}{(k-j)!}$, a tedy pro $x = a$ dostaneme dokazované tvrzení. □

Nyní se vrátíme k Peanově větě a uvedeme si její důkaz.

Důkaz (Peanove věta) Nechť $P_n(x)$ je polynom stupně nejvýše n, pak dle lemmatu 1.3 je

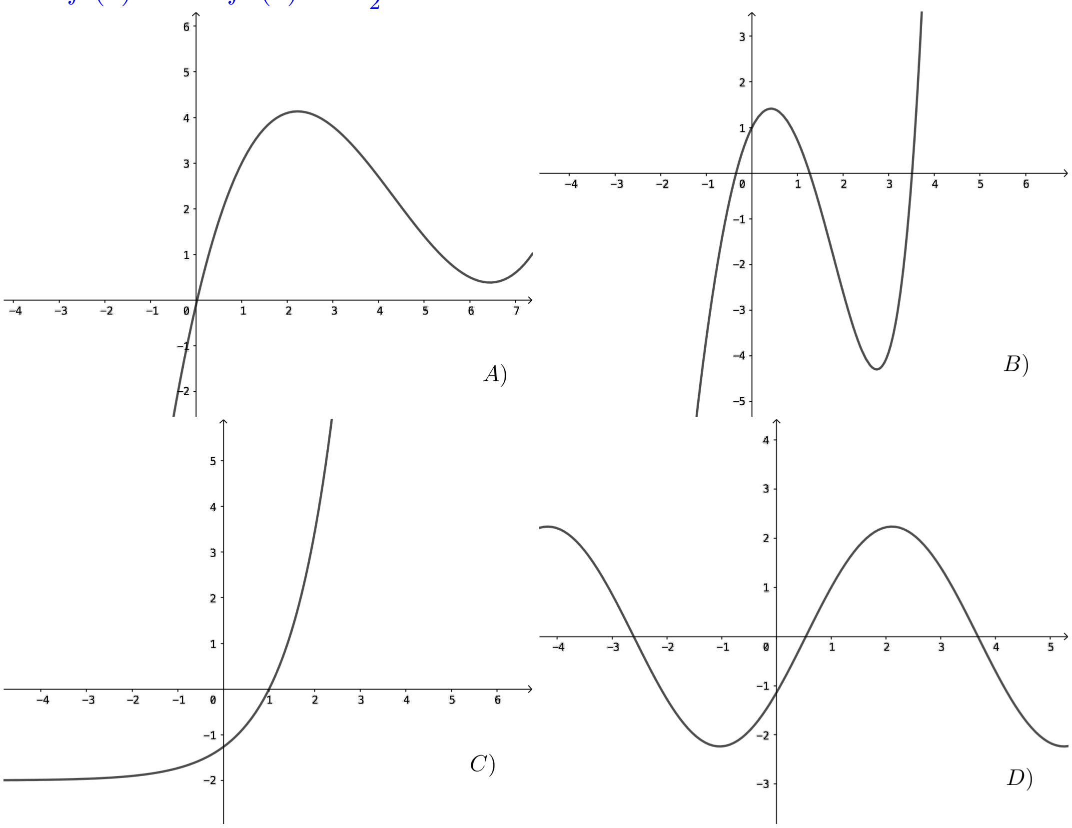
$$f(x) - P_n(x) = o((x-a)^n) \Leftrightarrow (f(x) - P_n(x))^{(k)} = 0 \text{ pro } k = 0, 1, ..., n.$$

Tedy $f^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(a)$, a tudíž dle lemmatu 1.4 je $c_i = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

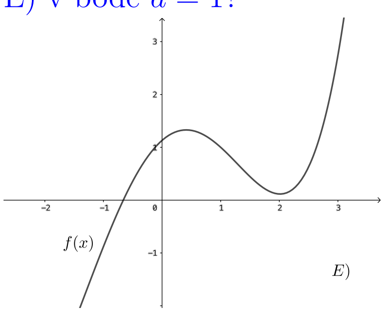
□

Otázka:

a) Určete, který z následujících grafů funkcí odpovídá hodnotám zadaných derivací $f'(1) = 2$ a $f''(1) = -\frac{1}{2}$.



b) Které z následujících polynomů jsou Taylorovy polynomy funkce f z obrázku E) v bodě $a = 1$?



i) $P(x) = 1 - x - x^2$

ii) $P(x) = 2 - x$

iii) $P(x) = 1 - 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$

iv) $P(x) = 1 - 1(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2$

v) $P(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2$

Odpověď:

a) Zadaným derivacím odpovídají grafy funkcí na obrázku A) a D).

b) Z obrázku lze odhadnout, že $f(1) = 1$ a $f'(1) = -1$. Jelikož je funkce f v bodě $a = 1$ konkávní, pak $f''(a) \leq 0$ (konkrétně je na obrázku graf funkce, která má $f''(1) = -1$. Hodnotám $f(1) = 1, f'(1) = -1$ a $f''(1) = -1$ odpovídají Taylorovy polynomy $T_0^{f,1}(x) = 1$, $T_1^{f,1}(x) = 1 - 1(x-1) = 2 - x$ a $T_2^{f,1}(x) = 1 - 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2$. Polynomy vyšších řádů zde neuvádíme, jelikož v zadání jsou polynomy maximálně druhého stupně. Správná odpověď je tedy ii), iii) a v).

Příklad 1.3 *Určete Taylorův polynom funkce* $f(x) = e^x \cos x$ *v bodě* $a = 0$ *řádu* $n = 3$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x \cos x, & f(0) &= 1,\\
f'(x) &= e^x(\cos x - \sin x), & f'(0) &= 1,\\
f''(x) &= -e^x(\cos x - 2\sin x - \cos x) = 2e^x \sin x, & f''(0) &= 0,\\
f'''(x) &= -2e^x(\sin x + \cos x), & f'''(0) &= -2.
\end{aligned}$$

$$T_3^{f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = 1 + x - \frac{1}{3}x^3.$$

Taylorův polynom funkce $f(x) = e^x \cos x$ *lze také získat z Taylorových polynomů funkcí* e^x *a* $\cos x$*. Z Peanovy věty víme, že* $e^x - T_3^{e^x,0}(x) = o(x^3)$*, tedy*

$$e^x = T_3^{e^x,0}(x) + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Podobně dostaneme

$$\cos x = T_3^{\cos x,0}(x) + o(x^3) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3).$$

Tedy

$$\begin{aligned}
e^x \cos x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)\\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{2!} + o(x^3) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).
\end{aligned}$$

Zde jsme využili toho, že $x^4 = o(x^3), x^5 = o(x^3), \ldots$ *a* $x^n \cdot o(x^m) = o(x^{m+n})$*. Nakonec opět použijeme Peanovu větu. Jelikož* $e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$*, pak* $T_3^{e^x \cos x, 0}(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3}$.

Příklad 1.4 *S využitím Taylorova polynomu vypočtěte limitu* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x \cos x - (1+x)}{x^3}$*. Jelikož ve jmenovateli máme výraz* x^3*, stačí výraz v čitateli aproximovat Taylorovým polynomem řádu* $n = 3$*. Využijeme výsledku z předchozího cvičení.*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^x \cos x - (1+x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - (1+x)}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{\frac{-1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{1} = \frac{-1}{3}.\end{aligned}$$

Otázka:

a) Nechť $T_n^{f,0}(x)$ a $T_m^{f,0}(x)$ jsou Taylorovy polynomy řádu n a m a nechť $n < m$. Platí nerovnost $|f(1) - T_n^{f,0}(1)| \geq |f(1) - T_m^{f,0}(1)|$?

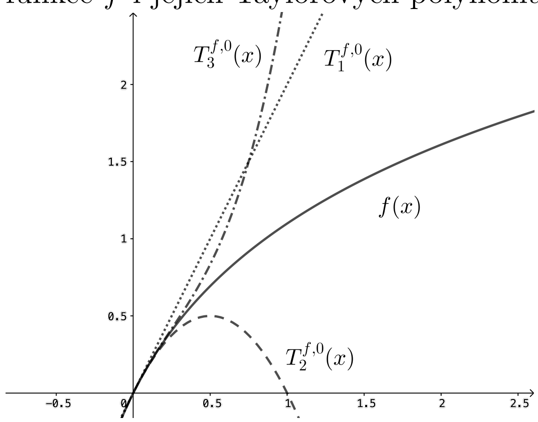
b) Uvažujme "chybu" při aproximaci funkce $f(x)$ pomocí Taylorova polynomu v bodě $x = a+1$, tj. $f(a+1) - T_n^{f,a}(a+1)$. Rozhodněte o platnosti následujícího tvrzení. Mějme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $|f(a+1) - T_n^{f,a}(a+1)| < \varepsilon$. Jinak (volně) řečeno, pro dostatečně velké n můžeme chybu aproximace zmenšit na minimum.

Odpověď:

a) Neplatí. I když z Peanovy věty víme, že $f(x) - T_n^{f,0}(x) = o(x^n)$, nevíme, jak dobrá je aproximace funkce f pomocí Taylorova polynomu $T_n^{f,0}(x)$ v bodě $x = 1$ a zda tomto bodě zvýšením řádu Taylorova polynomu dostaneme lepší aproximaci. Uvažujme funkce $f(x) = \ln(1+2x)$, pak

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{1+2x} \\ f''(x) &= -\frac{2^2}{(1+2x)^2} \\ f'''(x) &= 2\frac{2^3}{(1+2x)^3} \\ &\vdots \\ f^{(n)} &= (-1)^{n+1}(n-1)!\frac{2^n}{(x+1)^n}, \end{aligned}$$

tedy $T_n(x) = 2x - \frac{2^2x^2}{2} + \frac{2^3x^3}{3} - ... + (-1)^{n+1}\frac{2^nx^n}{n}$. Porovnáme-li hodnoty $f(1) = 1,099$, $T_1^{f,0}(1) = 2$, $T_2^{f,0}(1) = 0$ a $T_3^{f,0}(1) = 2,667$, pak nejlépe funkci f v bodě $x = 1$ aproximuje polynom $T_1^{f,0}(x)$. Na následujícím obrázku je vidět graf funkce f i jejich Taylorových polynomů řádu $1, 2$ a 3.



b) Toto tvrzení neplatí. Na obrázku k předchozí otázce je vidět, že i když Taylorův polynom vyššího řádu v okolí nuly aproximuje funkci f lépe než Taylorův polynom nižšího řádu, tak v bodě $x = 1$ už to obecně neplatí. Lze ukázat (ač to zde dokazovat nebudeme), že pro funkci $f(x) = \ln(1 + 2x)$ není žádná z aproximací pomocí Taylorova polynomu $T_n^{f,0}(x)$ v bodě $x = 1$ moc přesná.

Definice 1.3 *Nechť $T_n^{f,a}(x)$ je Taylorův polynom v bodě a řádu n. Pak*

$$R_n^{f,a}(x) = f(x) - T_n^{f,a}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

nazveme Taylorův zbytek $n-$tého řádu funkce f v bodě a. Často používáme kratší značení $R_n(x)$, je-li z kontextu jasné, o které funci f jakém bodě a je řeč.

Následující věta nám ukazuje, jak velký je Taylorův zbytek n-tého řádu, tedy jaká je chyba při aproximaci funkce f pomocí Taylorova polynomu n-tého řádu.

Věta 1.5 (Lagrangeův tvar zbytku) *Nechť f má vlastní derivace až do řádu $n+1$ včetně na uzavřeném intervalu $J = [x, a]$ (nebo $J = [a, x]$). Pak existuje $x_0 \in J^0$ takové, že*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Důkaz Pro pevné $x \in \mathbb{R}$ zaveďme funkci

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \quad t \in J,$$

pak $F(x) = 0$, $F(a) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = R_n(x)$ a

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} k\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^{k-1} \\ &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

Pak dle Cauchyho věty o střední hodnotě (5.7 první semestr) aplikované na funkce $F(t)$ a $g(t) = (x-t)^{n+1}$ existuje $x_0 \in J^0$ takové, že

$$\frac{F(x)-F(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{F'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \frac{F(x)-F(a)}{g(x)-g(a)} &= \frac{F'(x_0)}{g'(x_0)} \\ \frac{-R_n(x)}{-(x-a)^{n+1}} &= \frac{-\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}{-(n+1)(x-x_0)^n} \\ R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

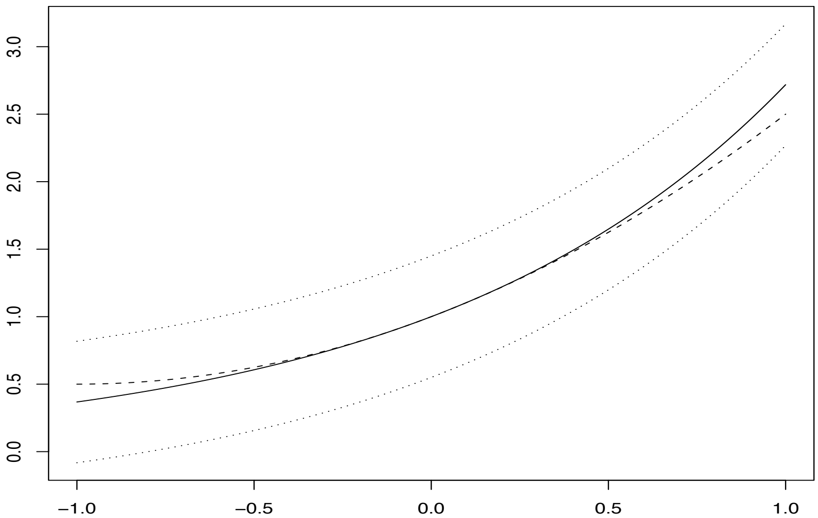
□

Poznamenejme, že s využitím Lagrangeova tvaru zbytku lze dostat rovnost (za splňení předpokladů předchozí věty)

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n^{f,a}(x) + R_n^{f,a}(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Příklad 1.5 *Pro* $f(x) = e^x$ *a* $a = 0$ *dostáváme* $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, *tedy*

$$T_n^{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$



Obrázek 1.2:
Plná čára znázorňuje graf funkce e^x, čárkovaně je vyznačen graf aproximace Talorovým polynomem, tečkovaně je vyznačeno pásmo, ve kterém by se měla podle výpočtů aproximace pohybovat.

Pak z využitím Lagrangeova tvaru zbytku dostaneme

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{e^{x_0}}{(n+1)!}(x)^{n+1},$$

kde $x_0 \in (0, x)$ *pro* $x > 0$ *a* $x_0 \in (x, 0)$ *pro* $x < 0$. *Tedy* $|R_n(x)| < \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, *a proto pro libovolné* $x \in \mathbb{R}$, $R_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Námi získaný odhad zbytku nám umožnuje také odpovedět na otázku, jaké máme zvolit n *tak, aby na zvoleném intervalu byla chyba při aproximaci funkce Taylorovým polynomem pod námi zvolenou hranicí. Konkrétně rozhodneme-li se, že chceme aproximovat funkci* e^x *na intervalu* $[-1, 1]$ *Taylorovým polynomem tak, aby chyba při této aproximaci byla menší než* 1, *pak dostaneme, že* $R_n(x) < \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e^1}{(n+1)!} < 1$, *tedy* $n \geq 2$. *Při této volbě* n *bude chyba na intervalu* $[-1, 1]$ *menší než* $0,454$. *Na obrázku 1.1 je znázorněn graf funkce* e^x *a její aproximace pomocí Taylorova polynomu třetího stupně.*

Příklad 1.6 • *Nechť* $f(x) = \sin x$ *a* $a = 0$, *pak* $\sin^{(n)}(0) = 0$ *pro* n *sudé a*

$\sin^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ *pro* n *liché.*

$$T_{2n}^{f,0}(x) = T_{2n-1}^{f,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Využijeme opět Lagrangeův tvar zbytku, pak dostaneme

$$|R_{2n-1}(x)| = |R_{2n}(x)| = \left|\frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!}(x-0)^{2n+1}\right| \leq \frac{1}{(2n+1)!}|x|^{2n+1},$$

jelikož $|\sin^{(n)}(x)| \leq 1$*. Tedy pro libovolné* $x \in \mathbb{R}$, $R_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Chceme-li například odhadnout $\sin(\frac{1}{2})$*, pak dostaneme*

$$|R_1(\frac{1}{2})| = |R_2(\frac{1}{2})| \leq 0,0208, \qquad |R_3(\frac{1}{2})| = |R_4(\frac{1}{2})| \leq 0,00043,$$
$$|R_5(\frac{1}{2})| = |R_6(\frac{1}{2})| \leq 3,62 \cdot 10^{-6}, \qquad |R_7(\frac{1}{2})| = |R_8(\frac{1}{2})| \leq 1,61 \cdot 10^{-8},$$

tedy chceme-li odhadnout $\sin(\frac{1}{2})$ *s přesností na tři desetinná místa, pak stačí aproximace Taylorovým polynomem třetího stupně.*

$$\begin{aligned}
\sin(\frac{1}{2}) &= 0,4794255386042\\
\frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} &= 0,4791667\\
\frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} + \frac{(\frac{1}{2})^5}{5!} &= 0.4794271\\
\frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} + \frac{(\frac{1}{2})^5}{5!} - \frac{(\frac{1}{2})^7}{7!} &= 0.4794255332
\end{aligned}$$

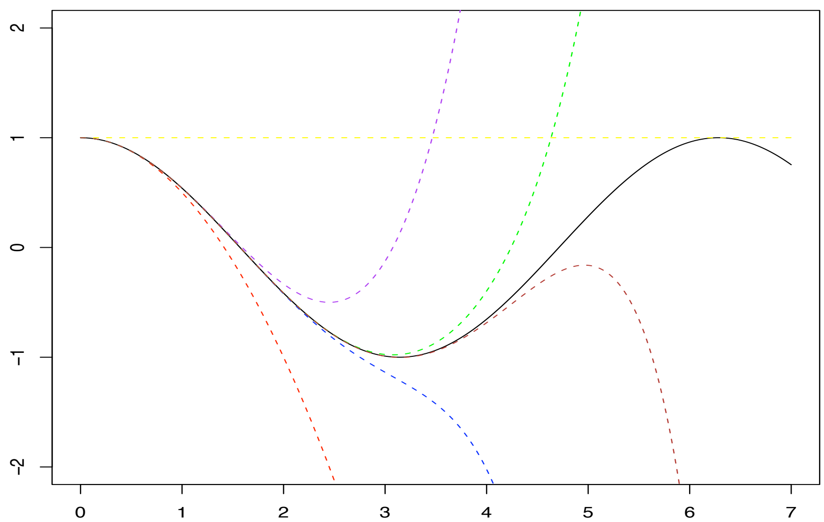
- *Obdobně pro* $f(x) = \cos x$ *a* $x_0 = 0$ *dostaneme*

$$T_{2n}^{f,0}(x) = T_{2n+1}^{f,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

a

$$|R_{2n}(x)| = |R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

tedy $R_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$.



Obrázek 1.3:
Plná čára znázorňuje graf funkce $\cos(x)$, čárkovaně je vyznačen graf aproximace Taylorovým polynomem nultého (žlutě), druhého (červeně), čtvrtého (fialově), šestého (modře), osmého (zeleně) a desátého (hnědě) stupně.

Příklad 1.7 *Uvažujme funkci $f(x) = \ln(1+x)$ a bod $a = 0$. Jelikož*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, && f'(0) = 1 \\
f''(x) &= -(1+x)^{-2}, && f'(0) = -1 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n} && f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!,
\end{aligned}$$

tedy

$$T_n^{f,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}.$$

Jak daleko od nuly má Taylorův polynom $T_n^{f,0}(x)$ smysl, chceme-li jím aproximovat funkci $f(x)$ $(x > 0)$? S využitím Lagrangeova tvaru zbytku dostaneme, že exisuje $x_0 \in (0, x)$ splňující

$$R_n^{f,0}(x) = (-1)^n \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} x^{n+1} = (-1)^n \frac{(1+x_0)^{-(n+1)}}{n+1} x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)} \left(\frac{x}{1+x_0}\right)^{n+1}.$$

Tedy Taylorův zbytek (chyba aproximace) $R_n^{f,0}(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)}\left(\frac{x}{1+x_0}\right)^{n+1}$ konverguje k nule, je-li $\frac{x}{1+x_0} \leq 1$. Jelikož x_0 může být libovolně blízko nuly, pak víme, že $R_n^{f,0}(x) \to 0$ pro $x \in (0, 1]$. Otázkou zůstává, zda nemůže Taylorův zbytek $R_n^{f,0}(x)$ konvergovat k nule i pro nějaké $x > 1$. Uvažujme $x > 0$, pak

$$R_n^{f,0}(x) = f(x) - T_n^{f,0}(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}.$$

Kdyby $R_n^{f,0}(x)$ konvergoval k nule, pak by musela řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$ konvergovat k hodnotě $f(x)$. Jelikož ale pro $x > 1$ nesplňuje řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$ nutnou podmínku konvergence ($\lim_{n\to\infty} |(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}| = \infty$), pak je divergentní, a tedy $R_n^{f,0}(x)$ nekonverguje k nule (Taylorův polynom není vhodná aproximace pro funkci $f(x) = \ln(1+x)$ v bodě $x > 1$).

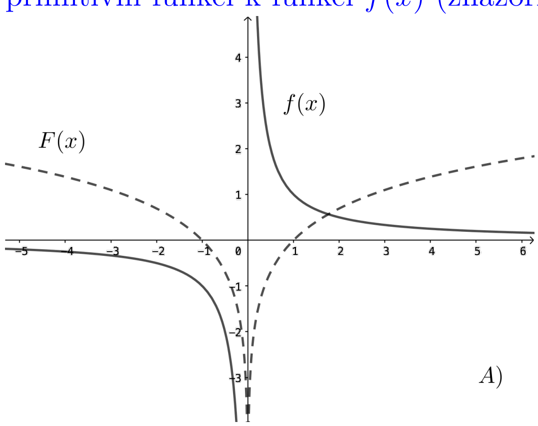
Kapitola 2

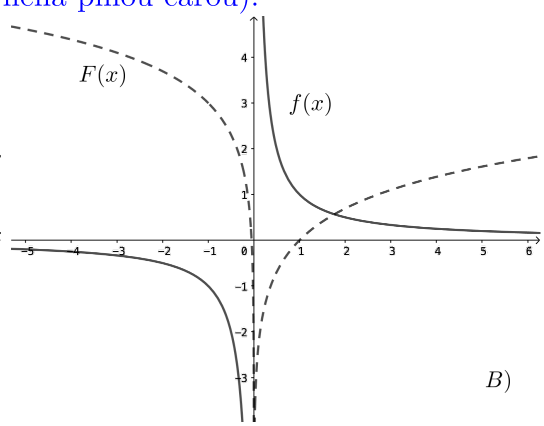
Primitivní funkce

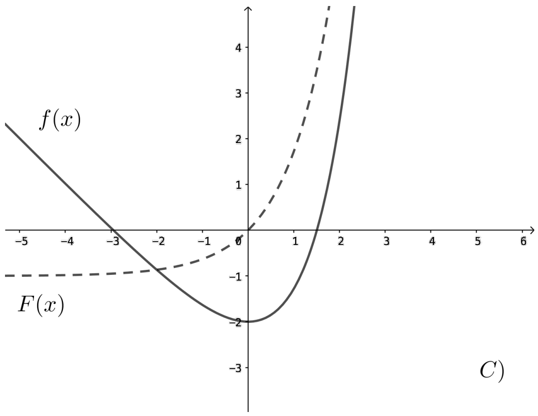
2.1 Primitivní funkce

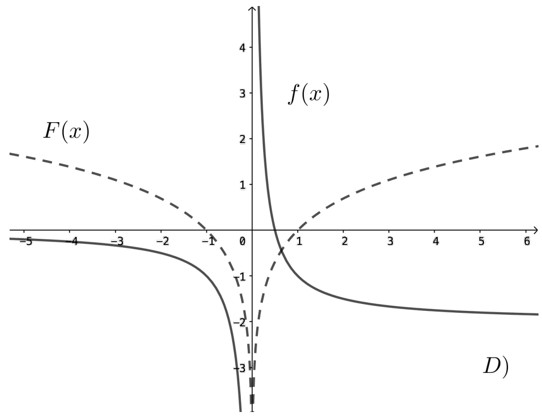
Definice 2.1 *Funkce $F(x)$ se nazývá primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu I, jestliže $F'(x) = f(x)$ na I (v krajních bodech jednostranné derivace).*

Otázka:
Určete, na kterém z následujících grafů je funkce $F(x)$ (znázorněná čárkovanou čarou) primitivní funkcí k funkci $f(x)$ (znázorněná plnou čarou).









Odpověď:

A) $F(x) = \ln|x|$ a $f(x) = \frac{1}{x}$, tedy $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$.

B) $F(x) = \ln(x)$ pro $x > 0$, $F(x) = \ln(-x) + 3$ pro $x < 0$ a $f(x) = \frac{1}{x}$, tedy $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$.

C) $F(x) = e^x - 1$ a $f(x) = e^x - x - 3$, tedy $f'(x) = F(x)$, ale $F'(x) \neq f(x)$. $F(x)$ není primitivní funkcí k funkci $f(x)$. Z grafu je vidět, že $F(x)$ je rostoucí (alespoň ve znázorněném intervalu), ale $f(x)$ není v celém znázorněném intervalu kladná, tedy $F'(x) \neq f(x)$.

D) $F(x) = \ln|x|$, $f(x) = \frac{1}{x} - 2$ pro $x > 0$ a $f(x) = \frac{1}{x}$ pro $x < 0$. Tedy $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu $(-\infty, 0)$, ale není primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu $(0, \infty)$.

Věta 2.1

- *Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$, pak pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ je také $F(x) + c$ primitivní funkce k funkci $f(x)$.*
- *Jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu I, potom $F(x) - G(x)$ je konstantní na I.*

Důkaz

- $$(F(x) + c)' = F'(x) = f(x),$$

  tedy $F(x) + c$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$.

- Označme $H(x) = F(x) - G(x)$, pak $H'(x) = (F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$ na I. Pro všechny $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ platí $H(x_1) - H(x_2) = H'(\xi)(x_1 - x_2) = 0$ kde $\xi \in (x_1, x_2)$ (Lagrangeova věta o střední hodnotě). Tedy $H(x)$ je konstantní na I.

$\square$

Označení: Množinu všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ nazýváme neurčitým integrálem funkce f (na I) a značíme $\int f(x)dx$, píšeme $\int f(x)dx = F(x) + c$, kde tímto zápisem míníme, že konstantu c lze volit libovolně, tedy neurčitý integrál je množina všech funkcí, které se od funkce $F(x)$ liší jen o konstantu.

Tabulka primitivních funkcí:

$\int cdx$	cx
$\int x^a dx$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$\int e^x dx$	e^x
$\int \frac{1}{x} dx$	$\ln \lvert x \rvert$
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\int \sin x dx$	$-\cos x$
$\int \cos x dx$	$\sin x$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\mathrm{tg} x$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\mathrm{cotg} x$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\mathrm{arcsin} x$
$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\mathrm{arccos} x$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx$	$\mathrm{arctg} x$

Věta 2.2 *Nechť $f(x)$ a $g(x)$ mají primitivní funkce $F(x)$ a $G(x)$ na intervalu I, pak*

- *funkce $(f+g)(x)$ má na I primitivní funkci $(F+G)(x)$, tj.*

$$\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

- *Nechť $c \in \mathbb{R}$, pak*

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx.$$

Důkaz

-

$$(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x).$$

- $$(cF)'(x) = cF'(x) = cf(x).$$

$\square$

Věta 2.3 (Integrace per partes) *Nechť $f(x)$ a $g(x)$ mají vlastní derivace na intervalu I. Pak*

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Důkaz Plyne z věty o derivaci součinu.

$$\begin{gathered}(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\\ \Downarrow\\ f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)\\ \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx\end{gathered}$$

$\square$

Příklad 2.1

$$\int e^x x dx = e^x x - \int e^x dx = e^x(x-1) + c$$

Příklad 2.2

$$\begin{aligned}\int x^n \ln x dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{x}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^n}{n+1}dx\\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c\end{aligned}$$

Příklad 2.3

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\cos 5x dx &= \frac{e^{3x}\cos 5x}{3} - \int \frac{e^{3x}(-5\sin 5x)}{3}dx\\ &= \frac{e^{3x}\cos 5x}{3} - \left[\frac{e^{3x}(-5\sin 5x)}{3^2} - \int \frac{e^{3x}(-5^2\cos 5x)}{3^2}dx\right]\\ &= \frac{e^{3x}}{3}\left(\cos 5x + \frac{5}{3}\sin 5x\right) - \frac{25}{9}\int e^{3x}\cos 5x dx\end{aligned}$$

Označíme-li $\mathcal{I} = \int e^{3x} \cos 5x dx$, *pak jsme dostali rovnici*

$$\mathcal{I} = \frac{e^{3x}}{3}\left(\cos 5x + \frac{5}{3}\sin 5x\right) - \frac{25}{9}\mathcal{I},$$

tedy

$$\mathcal{I} = \int e^{3x}\cos 5x dx = \frac{9}{34}\frac{e^{3x}}{3}\left(\cos 5x + \frac{5}{3}\sin 5x\right) + c = \frac{e^{3x}}{34}\left(3\cos 5x + 5\sin 5x\right) + c.$$

Věta 2.4 (Věta o substituci I.) *Nechť* $F(x)$ *je primitivní funkce k funkci* $f(x)$ *na* J *a nechť* $\varphi : I \to J$ *má na* I *vlastní derivaci, potom*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)).$$

Důkaz

$$(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

□

Příklad 2.4

$$\begin{aligned}\int \sin(t^2)tdt &= \int \frac{1}{2}\sin(t^2)2tdt = \frac{1}{2}\int \sin(x)dx_{|x=t^2} = -\frac{1}{2}\cos(x) + C\\ &= -\frac{1}{2}\cos(t^2) + C.\end{aligned}$$

Byla použita substitutce $x = \varphi(t) = t^2$, *tedy* $\varphi(t)' = 2t$.

Příklad 2.5

$$\begin{aligned}\int \sin^3(t)dt &= \int (1-\cos^2(t))\sin(t)dt = \int (1-x^2)dx_{|x=-\cos(t)}\\ &= \left(x - \frac{x^3}{3}\right) + C = -\cos(t)\left(1 - \frac{\cos^2(t)}{3}\right) + C.\end{aligned}$$

Pomocí per-partes:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} = \int \sin^3(t)dt = \int \sin^2(t)\sin(t)dt &= -\cos(t)\sin^2(t) + \int 2\cos^2(t)\sin(t)dt\\ &= -\cos(t)\sin^2(t) + 2\int (1-\sin^2(t))\sin(t)dt\\ &= -\cos(t)\sin^2(t) + 2\int \sin(t)dt - 2\int \sin^3(t)dt\\ &= -\cos(t)\sin^2(t) - 2\cos(t) - 2\mathcal{I},\end{aligned}$$

tedy

$$\mathcal{I} = \frac{1}{3}\big(-\cos(t)\sin^2(t) - 2\cos(t)\big) + C.$$

Věta 2.5 (Věta o substituci II.) *Nechť φ zobrazuje interval I na interval J a má na něm vlastní derivaci, pro kterou platí buď $\forall t \in I\ \varphi'(t) > 0$ nebo $\forall t \in I\ \varphi'(t) < 0$. Nechť $G(t)$ je primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na I, pak je $G(\varphi^{-1}(x))$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na J. Tedy*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt_{|t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Důkaz Jelikož derivace funkce φ nemění na I znaménko a je nenulová, pak je funkce φ ryze monotónní, a tedy dle věty o derivaci inverzní funkce (věta 4.4. I. semestr) existuje $(\varphi^{-1})'(x)$ a platí $(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}$, kde $x = \varphi(t)$, tedy $t = \varphi^{-1}(x)$. Pak dostaneme

$$\begin{aligned}\big(G(\varphi^{-1}(x))\big)' &= G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = G'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}\\ &= f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).\end{aligned}$$

□

Příklad 2.6

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}dx &= \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt_{|t=\arcsin(x)} = \int \cos^2(t)dt\\ &\overset{p.p.}{=} \sin(t)\cos(t) + \int \sin^2(t)dt = \sin(t)\cos(t) + \int (1-\cos^2(t))dt\\ &= \sin(t)\cos(t) + t - \int \cos^2(t)dt = \frac{1}{2}(t + \sin(t)\cos(t)) + C\\ &= \frac{1}{2}\left(t + \sin(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}\right) + C.\end{aligned}$$

Byla použita substituce $x = \varphi(t) = \sin(t)$, tedy $\varphi(t)' = \cos(t)$ a $t = \arcsin(x)$.

2.2 Integrace racionálních funkcí

V této části se budeme zabývat integrací racionální lomené funkce.

Definice 2.2 *Racionální funkcí (nebo také racionální lomenou funkcí) rozumíme funkci danou předpisem*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy s reálnými koeficienty ($f(x)$ je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $Q(x) \neq 0$).

I.

$$\int \frac{1}{(x-a)^k} dx, \quad a \in \mathbb{R}$$

Použijeme substituci $z = x - a$. Pro $k = 1$ dostaneme

$$\int \frac{1}{(x-a)} dx = \int \frac{1}{z} dz_{|z=x-a} = \ln|z| + C = \ln|x-a| + C.$$

Pro $k > 1$ dostaneme

$$\int \frac{1}{(x-a)^k} dx = \int \frac{1}{z^k} dz_{|z=x-a} = \frac{1}{(-k+1)z^{k-1}} + C = \frac{1}{(-k+1)(x-a)^{k-1}} + C.$$

II.

$$\int \frac{1}{(x^2+ax+b)} dx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Předpokládáme, že polynom $x^2 + ax + b$ nemá reálné kořeny.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+ax+b)} dx &= \int \frac{1}{(x+\frac{a}{2})^2 + (b - \frac{a^2}{4})} dx = \int \frac{1}{y^2+c} dy_{|y=x+\frac{a}{2}, c=b-\frac{a^2}{4}} \\
&= \int \frac{1}{y^2+c} dy = \int \frac{1}{c\left(\left(\frac{y}{\sqrt{c}}\right)^2 + 1\right)} dy \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{c}\,(z^2+1)} dz_{|z=\frac{y}{\sqrt{c}}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arctg}(z) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{c}}\right) + C
\end{aligned}$$

III.

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^k}dx, k \geq 2$$

Označme $I_k = \int \frac{1}{(x^2+1)^k}dx$ a odvoďme rekurentní vzorec pro výpočet I_k.

Uvědomme si, že od integrálu $\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^k}dx$, kde x^2+ax+b nemá reálný kořen, lze přejít k integrálu $\int \frac{1}{(z^2+1)^k}dz$ za pomoci substitucí aplikovaných v bodě II.

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{1}{(x^2+1)^k}dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^k}dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^k}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^k}dx \\ &= \int \frac{1}{(x^2+1)^{k-1}}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^k}dx = I_{k-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^k}dx. \end{aligned}$$

Nyní se zaměříme na integrál $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^k}dx$. K výpočtu tohoto integrálu budeme potřebovat určit integrál $\int \frac{x}{(x^2+1)^k}dx$,

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2+1)^k}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^k}dz_{|z=x^2+1} \\ &= \frac{1}{2(1-k)}\frac{1}{z^{k-1}} + C = \frac{1}{2(1-k)(x^2+1)^{k-1}} + C. \end{aligned}$$

Pak s využitím integrace per partes (věta 2.3)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+1)^k}dx &= \int x\frac{x}{(x^2+1)}dx \overset{p.p.}{=} x\frac{1}{2(1-k)(x^2+1)^{k-1}} - \int \frac{1}{2(1-k)(x^2+1)^{k-1}}dx \\ &= \frac{1}{2(1-k)}\left(\frac{x}{(x^2+1)^{k-1}} - I_{k-1}\right). \end{aligned}$$

Dostaneme tedy

$$\begin{aligned} I_k &= I_{k-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^k} = I_{k-1} - \frac{1}{2(1-k)}\left(\frac{x}{(x^2+1)^{k-1}} - I_{k-1}\right) \\ &= \frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1} + \frac{1}{(2k-2)(x^2+1)^{k-1}}. \end{aligned}$$

Příklad 2.7

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{1}{(1+x^2)}dx - \int x\frac{x}{(1+x^2)^2}\\
&= \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int x\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx\\
&= \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\left[x\left(\frac{-1}{x^2+1}\right) - \int 1\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)dx\right]\\
&= \operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx\\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{2(x^2+1)} + C\end{aligned}$$

IV.

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^k}dx, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Předpokládáme, že polynom x^2+cx+d nemá reálné kořeny.

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^k}dx &= \int \frac{\frac{a}{2}(2x+c)+(b-\frac{ac}{2})}{(x^2+cx+d)^k}dx\\
&= \frac{a}{2}\int \frac{1}{z^k}dz_{|z=x^2+cx+d} + \int \frac{\gamma}{(x^2+cx+d)^k}dx_{|\gamma=b-\frac{ac}{2}}\end{aligned}$$

Použili jsme substituci $z = x^2+cx+d$. První integrál lze dopočítat dle bodu I., druhý integrál podle bodů II. a III.

Příklad 2.8

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+4}{(2x^2+8x+14)^2}dx &= \int \frac{\frac{3}{4}(4x+8)-2}{(2x^2+8x+14)^2}dx\\
&= \int \frac{\frac{3}{4}(4x+8)}{(2x^2+8x+14)^2}dx - \int \frac{2}{(2x^2+8x+14)^2}dx\\
&= \frac{3}{4}\int \frac{1}{z^2}dz_{|z=2x^2+8x+14} - 2\int \frac{1}{(2x^2+8x+14)^2}dx\end{aligned}$$

Určeme nejdříve

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(2x^2+8x+14)^2}dx &= \int \frac{1}{2^2(x^2+4x+7)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{((x+2)^2+3)^2}dx \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{(y^2+3)^2}dy_{|y=x+2} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{3^2((\frac{y}{\sqrt{3}})^2+1)^2}dy \\
&= \frac{1}{4\cdot 9}\int \frac{\sqrt{3}}{(z^2+1)^2}dz_{|z=\frac{y}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{1}{12\sqrt{3}}\left[\int \frac{z^2+1}{(z^2+1)^2}dz - \int z\frac{z}{(z^2+1)^2}dz\right] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}(z) - \frac{1}{2}\int z\frac{2z}{(z^2+1)^2}dz\right] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}(z) + \frac{z}{2(z^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^2+1}dz\right] \\
&= \frac{1}{24\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}(z) + \frac{z}{z^2+1}\right] + C \\
&= \frac{1}{24\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\frac{x+2}{\sqrt{3}}}{(\frac{x+2}{\sqrt{3}})^2+1}\right] + C
\end{aligned}$$

Dostaneme tedy

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+4}{(2x^2+8x+14)^2}dx &= \frac{3}{4}\int \frac{1}{z^2}dz_{|z=2x^2+8x+14} - 2\int \frac{1}{(2x^2+8x+14)^2}dx \\
&= \frac{-1}{z}_{|z=2x^2+8x+14} - \frac{2}{24\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\frac{x+2}{\sqrt{3}}}{(\frac{x+2}{\sqrt{3}})^2+1}\right] + C \\
&= \frac{-1}{2x^2+8x+14} - \frac{1}{12\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}(x+2)}{x^2+4x+7}\right] + C
\end{aligned}$$

V další části se budeme zabývat tím, jak obecnou racionální funkci rozložit na součet racionálních funkcí, které jsou ve tvaru I. - IV. Uvažujme racionální funkci $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Pak

1) Je-li stupeň $P(x) \geq$ stupeň $Q(x)$, pak částečně vydělíme a dostaneme

$$R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)},$$

kde $P_1(x)$ a $P_2(x)$ jsou polynomy a stupeň $P_2(x) <$ stupeň $Q(x)$.

2) Je-li stupeň $P(x) <$ stupeň $Q(x)$, použijeme následující větu o rozkladu.

Věta 2.6 (O rozkladu na parciální zlomky) *Je-li*

$$Q_m(x) = c_m(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$$

rozklad polynomu Q_m na reálné kořenové činitele (c_m je konstanta, a_i jsou reálné kořeny a k_i značí jejich násobnost, součinitel $x^2+p_ix+q_i$ odpovídá dvojici komplexně sdružených kořenů násobnosti l_i, tedy platí $p_i^2-4q_i<0$). Nechť stupeň polynomu Q_m je m a $n<m$ je stupeň polynomu P_n, pak existuje rozklad

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{i,j}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{l_i} \frac{B_{i,j}x+C_{i,j}}{(x^2+p_ix+q_i)^j},$$

kde reálné koeficienty $A_{i,j}, B_{i,j}$ a $C_{i,j}$ tohoto rozkladu jsou určeny jednoznačně.

Příklad 2.9

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Koeficienty A, B a C určíme tak, že převedeme pravou stranu na společného jmenovatele a porovnáme koeficienty u polynomů na pravé a levé straně, tedy

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+(C-B)x+(A-C)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Dostaneme následující rovnice

$$\begin{aligned} A+B&=0\\ C-B&=0\\ A-C&=1, \end{aligned}$$

tedy $A=\frac{1}{2}$ a $B=C=-\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+1}.$$

Následující větu uvedeme bez důkazu.

Věta 2.7 (Základní věta algebry) *Každý polynom stupně alespoň jedna (s komplexními koeficienty) má alespoň jeden kořen (může být i komplexní).*

Lemma 2.8 *Je-li $a \in \mathbb{C}$ kořen polynomu $P_n(x)$ (polynom stupně n), pak $P_n(x)$ můžeme psát jako $(x-a)Q_{n-1}(x)$, kde $Q_{n-1}(x)$ je polynom stupně $n-1$.*

Důkaz

$$P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x) + c,$$

kde $c \in \mathbb{C}$. Existence takového rozkladu plyne z lemma 1.4, pokud ho přeformulujeme pro komplexní a a polynom s komplexními koeficienty. Pak dosazením a dostaneme

$$P_n(a) = (a-a)Q_{n-1}(a) + c = 0,$$

tedy $c = 0$. □

Důsledek 2.9 *Každý polynom $P_n(x)$ má rozklad na kořenové činitele, tedy*

$$P_n(x) = c_n(x-a_1)(x-a_2) \cdot ... \cdot (x-a_n),$$

kde $a_1, ..., a_n$ jsou kořeny polynomu $P_n(x)$ (nemusí být různé). Je-li k_i násobnost kořenu a_i, pak

$$P_n(x) = c_n(x-a_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (x-a_r)^{k_r}.$$

Příklad 2.10

$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$$

Kořeny jsou $1, -1, i, -i$.

Lemma 2.10 *Jsou-li koeficienty c_i reálné, potom má-li polynom $P_n(x)$ kořen $a \in \mathbb{C}$, má i kořen $\bar{a}$.*

Důkaz

$$\begin{aligned}
c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + ... + c_0 &= 0 \\
\overline{c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + ... + c_0} &= 0 \\
\overline{c_n a^n} + \overline{c_{n-1}a^{n-1}} + ... + \overline{c_0} &= 0 \\
c_n \overline{a^n} + c_{n-1}\overline{a^{n-1}} + ... + c_0 &= 0 \\
c_n \overline{a}^n + c_{n-1}\overline{a}^{n-1} + ... + c_0 &= 0.
\end{aligned}$$

□

Důsledek 2.11 *Polynom s reálnými koeficienty má rozklad tvaru*

$$P_n(x) = c_n(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

kde a_i jsou navzájem různé, (p_i,q_i) navzájem různé , $p_i^2-4q_i<0$ a $a_i,p_i,q_i\in\mathbb{R}$.

Věta 2.12 *Nechť $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ jsou polynomy s reálnými koeficienty stupně n a m, $n<m$, a nechť $Q_m(x)=(x-a)^kR_{m-k}(x)$, kde $R_{m-k}(a)\neq 0$. Pak existuje právě jedno $A\in\mathbb{R}$ takové, že*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{S_{m-2}(x)}{(x-a)^{k-1}R_{m-k}(x)},$$

kde $S_{m-2}(x)$ je polynom stupně nejvýše $m-2$.

Důkaz Nejprve ukážeme existenci tohoto rozkladu. Zvolme

$$A=\frac{P_n(a)}{R_{m-k}(a)},\quad P^1_{m-1}(x)=P_n(x)-A\cdot R_{m-k}(x).$$

Pak $P^1_{m-1}(x)$ je polynom stupně nejvýše $m-1$ a

$$\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{P^1_{m-1}(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{R_{m-k}(a)(x-a)^k} - \frac{P_n(x)-\frac{P_n(a)}{R_{m-k}(a)}R_{m-k}(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

kde $P^1_{m-1}(a)=0$, tedy $P^1_{m-1}(x)=(x-a)S_{m-2}(x)$. Dosazením do rovnice

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{(x-a)^k}+\frac{P^1_{m-1}(x)}{Q_m(x)},$$

dostaneme dokazované tvrzení. Jednoznačnost rozkladu dostaneme dosazením a do rovnice

$$P_n(x) = A\cdot R_{m-k}(x)+(x-a)S_{m-2}(x),$$

tedy

$$P_n(a)=A\cdot R_{m-k}(a)\Rightarrow A=\frac{P_n(a)}{R_{m-k}(a)}.$$

□

Věta 2.13 *Nechť $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ jsou polynomy s reálnými koeficienty stupně n a m, $n < m$, a nechť $Q_m(x) = (x^2 + px + q)^k R_{m-2k}(x)$, kde polynom $x^2 + px + q$ nemá reálný kořen a pro komplexní kořen α tohoto polynomu platí $R_{m-2k}(\alpha) \neq 0$. Pak existují právě dvě reálná čísla $B, C \in \mathbb{R}$ taková, že*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{S_{m-3}(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} R_{m-2k}(x)},$$

kde $S_{m-3}(x)$ je polynom stupně nejvýše $m - 3$.

Důkaz Důkaz provedeme obdobně jako u předchozí věty, ale začneme tentokrát jednoznačností koeficieltů B a C. Je-li

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{S_{m-3}(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} R_{m-2k}(x)}$$

požadovaný rozklad, pak

$$P_n(x) = (Bx + C)R_{m-2k}(x) + (x^2 + px + q)S_{m-3}(x).$$

Po dosazení α dostaneme

$$P_n(\alpha) = (B\alpha + C)R_{m-2k}(\alpha).$$

Pro $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i$ a $\frac{P_n(\alpha)}{R_{m-2k(\alpha)}} = a + bi$, kde $\alpha_1, \alpha_2, a, b \in \mathbb{R}$ dostaneme

$$B(\alpha_1 + \alpha_2 i) + C = a + bi \Rightarrow B = \frac{b}{\alpha_2}, C = a - B\alpha_1 = a - \frac{b}{\alpha_2}\alpha_1.$$

Nyní dokážeme existenci tohoto rozkladu. Zvolme

$$P^1_{m-1}(x) = P_n(x) - (Bx + C)R_{m-2k}(x),$$

pak

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{P^1_{m-1}(x)}{(x^2 + px + q)^k R_{m-2k}(x)}. \tag{2.1}$$

Navíc $P^1_{m-1}(\alpha) = 0$, tedy z poznámky 2.10 a důsledku 2.9 dostaneme

$$P^1_{m-1}(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})S_{m-3}(x) = (x^2 + px + q)S_{m-3}(x).$$

Dosazením do rovnice 2.1 dostáváme požadované tvrzení.

Nyní uvedeme důkaz věty 2.6.

Důkaz Nechť

$$Q_m(x) = c_n(x-a_1)^k(x^2+p_1x+q_1)^l$$

$(m = k+2l)$, pak opakovaným použitím vět 2.12 a 2.13 dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_k}{(x-a_1)^k} + \frac{S_{m-2}(x)}{(x-a_1)^{k-1}(x^2+p_1x+q_1)^l} \\
&= \frac{A_k}{(x-a_1)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a_1)^{k-1}} + \frac{S_{m-3}(x)}{(x-a_1)^{k-2}(x^2+p_1x+q_1)^l} \\
&\quad\vdots \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{(x-a_1)^i} + \frac{S_{m-k-1}}{(x^2+p_1x+q_1)^l} \\
&\quad\vdots \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{(x-a_1)^i} + \sum_{i=1}^{l} \frac{B_ix+C_i}{(x^2+p_1x+q_1)^i}.
\end{aligned}$$

Stejně postupujeme pro

$$Q_m(x) = c_n(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}.$$

□

2.3 Některé důležité substituce

Definice 2.3 *Polynom ve dvou proměnných se nazývá funkce*

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_{i,j}x^iy^j,$$

kde $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $a_{i,j} \in \mathbb{R}$. *Je-li alespoň jeden z členů* $a_{i,j}$, $i+j=n$, *nenulový, mluvíme o polynomu stupně* n.

Definice 2.4 *Racionální funkcí dvou proměnných nazýváme funkci*

$$R(x,y)=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

kde $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ jsou polynomy ve dvou proměnných.

I.

Nechť $R(x,y)$ je racionální funkce dvou proměnných, pak integrál

$$\int R(\sin x,\cos x)dx$$

převedeme na integrál racionální funkce pomocí následujících substitucí:

i) $t=\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$,

ii) $t=\mathrm{tg}(x)$ je-li $R(x,y)=R(-x,-y)$,

iii) $t=\sin x$ je-li $R(x,y)=-R(x,-y)$,

iv) $t=\cos x$ je-li $R(x,y)=-R(-x,y)$.

Příklad 2.11

$$\int\frac{1}{2\sin x+\cos x+3}dx$$

Užijeme substituci $t=\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, pak dostaneme

$$t^2=\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

$$\Downarrow$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin x=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1=\frac{2-(1+t^2)}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

$$dx=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dt=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Tedy

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2\sin x+\cos x+3}dx &= \int \frac{1}{2\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}\frac{2}{1+t^2}dt\\ &= \int \frac{1}{\frac{4t+(1-t^2)+3(1+t^2)}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt\\ &= \int \frac{1+t^2}{2t^2+4t+4}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t^2+2t+2}dt\\ &= \int \frac{1}{(t+1)^2+1}dt = \operatorname{arctg}(t+1)+C\\ &= \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)+C.\end{aligned}$$

Příklad 2.12

$$\int \sin^5 x\cos x dx$$

Zkusme nejprve substituci $t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, *pak*

$$\int \sin^5 x\cos x dx = \int \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^5\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2^6(t^5-t^7)}{(1+t^2)^7}dt.$$

Při použití substituce $t=\sin x, \quad dt=\cos x dx$ *dostaneme*

$$\int \sin^5 x\cos x dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6}+C = \frac{\sin^6 x}{6}+C.$$

II.(Eulerovy substituce)

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

i) Jsou-li x_1, x_2 dva různé reálné kořeny polynomu ax^2+bx+c, pak použijeme substituci

$$t=\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{(x-x_1)}}.$$

ii) Je-li $a>0$, pak lze použít substituci

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t.$$

iii) Je-li $c > 0$ lze použít substituci

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}.$$

Příklad 2.13

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}dx$$

Využijeme substituci $\sqrt{x^2-x+1} = -x+t$, *tedy*

$$\begin{aligned}
x^2-x+1 &= x^2-2xt+t^2\\
x(-1+2t) &= t^2-1\\
x &= \frac{1-t^2}{1-2t}\\
dx &= \frac{-2t(1-2t)+2(1-t^2)}{(1-2t)^2}dt = 2\frac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}dt
\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}dx = 2\int \frac{t^2-t+1}{t(1-2t)^2}dt$$

Použijeme rozklad na parciální zlomky

$$\begin{aligned}
\frac{A}{t}+\frac{B}{1-2t}+\frac{C}{(1-2t)^2} &= \frac{t^2-t+1}{t(1-2t)^2}\\
A(1-2t)^2+Bt(1-2t)+Ct &= t^2-t+1\\
4A-2B &= 1\\
-4A+B+C &= -1\\
A &= 1\\
B &= \frac{3}{2}\\
C &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}dx &= 2\int \frac{t^2-t+1}{t(1-2t)^2}dt\\ &= 2\int \frac{1}{t}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-2t}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(1-2t)^2}dt\\ &= \ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1-2t|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-2t}+c\\ &= \ln|x+\sqrt{x^2-x+1}|-\frac{3}{2}\ln|1-2(x+\sqrt{x^2-x+1})|\\ &\quad +\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-2(x+\sqrt{x^2-x+1})}+c.\end{aligned}$$

Kapitola 3

Riemannův integrál

Definice 3.1 *Nechť* $[a, b]$ *je omezený uzavřený interval, pak konečnou posloupnost bodů* $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ *nazveme dělením intervalu* $[a, b]$ *a její body dělícími body tohoto dělení. Používáme značení* $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$. *Číslo* $\Delta D = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., x_n - x_{n-1}\}$ *nazýváme normou dělení* D. $\mathcal{D}(a, b)$ *budeme značit množinu všech dělení intervalu* $[a, b]$.

Definice 3.2 *Dělení* D' *nazveme zjemněním dělení* D*, je-li každý dělící bod* D *také dělícím bodem dělení* D'.

Definice 3.3 *Nechť je* f *omezená funkce definovaná na* $[a, b]$ *a nechť* D *je dělení* $[a, b]$ *s dělícími body* x_i, $i = 0, ..., n$. *Potom*

$$s(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1} - x_i)$$

nazýváme dolní Riemannův součet funkce f *odpovídající dělení* D *a*

$$S(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1} - x_i)$$

nazýváme horní Riemannův součet funkce f *odpovídající dělení* D.

Otázka: Nechť D_1 a D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$ ($D_1, D_2 \in \mathcal{D}(a, b)$). Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.

a) Je-li $\Delta D_1 < \Delta D_2$ tak $s(f, D_2) \leq s(f, D_1)$.

b) Je-li D_1 zjemněním dělení D_2, pak $s(f, D_2) \le s(f, D_1)$.

c) Je-li D_1 zjemněním dělení D_2 a $\Delta D_1 < \Delta D_2$, pak $s(f, D_2) < s(f, D_1)$.

Odpověď:

a) Neplatí. Mějme $[a, b] = [0, 6]$, $f(x) = 0$ na $[0, 3) \cap (4, 6]$ a $f(x) = 1$ na $[3, 4]$, $D_2 = 0, 3, 4, 6$ a $D_1 = 0, 2, 4, 6$. Pak $\Delta D_1 = 2 < 3 = \Delta D_2$, ale

$$\begin{aligned} s(f, D_1) &= \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1} - x_i) \\ &= \inf_{x \in [0,2]} f(x) \cdot 2 + \inf_{x \in [2,4]} f(x) \cdot 2 + \inf_{x \in [4,6]} f(x) \cdot 2 = 0 \\ s(f, D_2) &= \inf_{x \in [0,3]} f(x) \cdot 3 + \inf_{x \in [3,4]} f(x) \cdot 1 + \inf_{x \in [4,6]} f(x) \cdot 2 = 0 + 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

b) Platí. Platnost tohoto tvrzení vychází z nerovnosti:

$$\inf_{x \in [x_1, x_3]} f(x)(x_3 - x_1) \le \inf_{x \in [x_1, x_2]} f(x)(x_2 - x_1) + \inf_{x \in [x_2, x_3]} f(x)(x_3 - x_2), \quad x_1 < x_2 < x_3.$$

c) Neplatí. Stačí zvolit konstantní funkce f na intervalu $[a, b]$.

Podobně jako v bodu b) platí: Je-li D_1 zjemněním dělení D_2, pak $S(f, D_2) \ge S(f, D_1)$.

Definice 3.4 *Nechť je f reálná a omezená funkce na $[a, b]$. Číslo $\sup_{D \in \mathcal{D}(a,b)} s(f, D)$ (resp. $\inf_{D \in \mathcal{D}(a,b)} s(f, D)$), kde supremum (resp. infimum) bereme přes všechna dělení intervalu $[a, b]$ nazveme dolní (resp. horní) Riemannův integrál funkce f přes interval $[a, b]$ a označujeme ho*

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \quad \left(resp. \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx \right).$$

Definice 3.5 *Je-li horní Riemannův integrál roven dolnímu Riemannovu integrálu, pak jejich společnou hodnotu nazýváme Riemannovým integrálem (přes interval $[a, b]$) a značíme ji*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Příklad 3.1 *Dirichletova funkce*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad x \in \mathbb{Q} \\ &= 1 \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Pak pro interval $[0,1]$ *je* $S(f,D) = 1$ *a* $s(f,D) = 0$ *pro libovolné dělení* D*, tedy neexistuje Riemannův integrál této funkce.*

Lemma 3.1 *Nechť* f *je omezená na* $[a,b]$*. Pak* f *má (Riemannův) integál* $\Leftrightarrow$ *ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* $D \in \mathcal{D}(a,b)$ *tak, že* $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$*.*

Důkaz

($\Rightarrow$) Označme $I = \int_a^b f(x)dx$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje D_1 a D_2 tak, že $I - s(f,D_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ a $S(f,D_2) - I < \frac{\varepsilon}{2}$. Nechť D je zjemněním D_1 i D_2, pak

$$s(f,D_1) \leq s(f,D) \leq S(f,D) \leq S(f,D_2)$$
$$\Downarrow$$
$$S(f,D) - s(f,D) \leq S(f,D_2) - s(f,D_1) < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Nechť $\forall \varepsilon > 0 \; \exists D$ tak, že $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$, pak

$$s(f,D) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,D),$$

tedy

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon.$$

Jelikož $\varepsilon > 0$ lze volit libovolně, dostaneme požadovanou rovnost horního a dolního Riemannova integrálu.

$\square$

Definice 3.6 *Funkce* f *je stejnoměrně spojitá na intervalu* I*, jestliže* $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ *tak, že* $\forall x, y \in I$ $(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$.

Otázka: Jsou následující funkce stejnoměrně spojité na intervalu I?

a) $f(x) = x$ na intervalu $I = (0,1]$.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $I = (0, 1]$.

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $I = [1, \infty)$.

Odpověď:

a) Ano. Stačí zvolit $\delta = \varepsilon$.

b) Ne. Pro libovolné $\delta > 0$ je $\sup_{x,y \in (0,\delta)} |f(x) - f(y)| = \infty$.

c) Ano. Opět stačí zvolit $\delta = \varepsilon$, jelikož $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = |\frac{x-y}{xy}| < |x - y|$ platí pro všechna $x, y > 1$.

Věta 3.2 (Cantorova) *Je-li f spojitá na $[a, b]$, je na $[a, b]$ stejnoměrně spojitá.*

Důkaz SPOREM

$$\neg(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in I, (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).)$$

Tedy

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : \exists x, y \in I, (|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon),$$

pak

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n, y_n \in I, (|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon).$$

Jelikož $x_n \in [a, b]$, pak dle Weierstrassovy věty existuje vybraná konvergentní posloupnost x_{k_n}. Označme $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_{k_n}$, pak $y_{k_n} \to x_0$, jelikož $|x_{k_n} - y_{k_n}| < \frac{1}{k_n}$, ale $\lim f(x_{k_n}) \neq \lim f(y_{k_n})$, což je ve sporu se spojitostí funkce f v bodě x_0 (Heineova věta). □

Věta 3.3 *Spojitá funkce na $[a, b]$ má na tomto intervalu Riemannův integrál.*

Důkaz Zvolme $\varepsilon > 0$, jelikož je fuknce f spojitá na $[a, b]$, je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá (Cantorova věta 3.2), tedy $\exists \delta > 0$ tak, že $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ pro všechna x, y splňující $|x - y| < \delta$. Zvolme dělení D_δ takové, že $\Delta D_\delta < \delta$, pak

$$\begin{aligned} S(f, D_\delta) - s(f, D_\delta) &= \sum_{i=0}^{n-1} [\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) - \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)](x_{i+1} - x_i) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy Riemannův integrál existuje, viz lemma 3.1.

□

Poznámka 3.1 *Má-li f Riemannův integrál na $[a,b]$, má ho i na $[c,d] \subset [a,b]$.*

Příklad 3.2 *V tomto příkladu si ukážeme, že spojitost funkce není nutnou podmínkou existence Riemannova integrálu. Nechť*

$$\begin{aligned} f &= 0, \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ &= 1, \quad x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{aligned}$$

Pro liché n a volbu $D = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1\}$ dostaneme

$$s(f,D) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} 1_{[x_{i+1} < \frac{1}{2}]} \frac{1}{n} = \frac{n-1}{2n}$$

$$S(f,D) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} 1_{[x_i < \frac{1}{2}]} \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n}.$$

Tedy $S(f,D) - s(f,D) = \frac{1}{n}$, a proto Riemannův integrál existuje viz lemma 3.1.

Definice 3.7 *Nechť f je reálná funkce na $[a,b]$ a D je jeho dělení, pak*

$$\sigma(f,D,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

se nazývá Riemannovým součtem, kde $\xi = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$ a $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Definice 3.8 *Pro dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$ které má $n+1$ dělících bodů, označme $N(D)$ množinu všech n-tic bodů $\xi = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$ splňující $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, kde $x_i,\ i = 0, 1, ..., n$ jsou dělící body dělení D.*

$$\lim_{\Delta D \to 0} \sigma(f,D,\xi) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (\Delta D < \delta \Rightarrow |\sigma(f,D,\xi) - A| < \varepsilon, \forall \xi \in N(D))$$

Lemma 3.4 *Je-li f omezená funkce na intervalu $[a,b]$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$ splňující $\Delta D < \delta$, platí*

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx - s(f,D) < \varepsilon$$

a

$$S(f,D) - \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx < \varepsilon.$$

Důkaz Pro $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_1 \in \mathcal{D}(a,b)$ splňující $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx - s(f, D_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ ($\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx) = \sup\limits_{D\in\mathcal{D}(a,b)} s(f,D)$). Označme $M = \sup\limits_{x,y\in[a,b]}(f(x) - f(y))$ a $(n+1)$ počet dělících bodů dělení D_1. Zvolme $\delta = \frac{\varepsilon}{2nM}$ a nechť $D \in \mathcal{D}(a,b)$ je libovolné dělení splňující $\Delta D < \delta$. Dále zvolme $D_2 = D \cup D_1$ (nejmenší dělení, které je zjemněním dělení D i D_1, tj. dělení obsahující všechny dělící body dělení D a D_1 ale žádné další dělící body). Jelikož je D_2 zjemněním dělení D i D_1, tak $s(f,D) \leq s(f,D_2)$ a $s(f,D_1) \leq s(f,D_2)$. Rozdíl součtů $s(f,D_2) - s(f,D)$ lze shora odhadnout výrazem $M\delta(n-1)$, jelikož rozdíl suprém funkce f přes různé intervaly je maximálně M, norma dělení $D_2 < \delta$ a je maximálně $n-1$ intervalů dělení D ve kterých je alespoň jeden bod dělení D_1. Tedy

$$s(f,D_2) - s(f,D) < M\delta(n-1) = M \cdot \frac{\varepsilon}{2nM} \cdot (n-1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jelikož $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \geq s(f,D_2) \geq s(f,D_1) > \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}$, tedy

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \geq s(f,D_2) \geq s(f,D) > s(f,D_2) - \frac{\varepsilon}{2} > \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx - \varepsilon.$$

Obdobně dokážeme existenci $\delta > 0$ takového, že platí druhá nerovnost a tedy pro menší z techto dvou delt platí obě nerovnosti.

Věta 3.5 *Omezená funkce f má na intervalu $[a,b]$ Riemannův integrál rovný A právě tehdy, když*

$$\lim_{\Delta D\to 0} \sigma(f,D,\xi) = A.$$

Důkaz

($\Rightarrow$) Má-li funkce Riemannův integrál, pak

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx.$$

Mějme $\varepsilon > 0$, pak dle lemmatu 3.4 existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$ splňující $\Delta D < \delta$ platí

$$\int_{a}^{b} f(x)dx - \varepsilon < s(f,D) \leq \int_{a}^{b} f(x)dx \leq S(f,D) < \int_{a}^{b} f(x)dx + \varepsilon.$$

Jelikož pro všechna $\xi \in N(D)$ platí $s(f,D) \leq \sigma(f,D,\xi) \leq S(f,D)$, tak dostáváme $|\sigma(f,D,\xi) - \int_{a}^{b} f(x)dx| < \varepsilon$, čímž je tato část důkazu hotova.

($\Leftarrow$) Zvolme $\varepsilon > 0$, pak existuje $\delta > 0$, takové že pro všechna $D \in \mathcal{D}(a,b)$ splňující $\Delta D < \delta$ a pro všechna $\xi \in N(D)$ je $|\sigma(f,D,\xi) - A| < \frac{\varepsilon}{4}$. Označme $\{x_i\}$ množinu dělících bodů dělení D a zvolme v každém intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ ξ_{i+1}^d a ξ_{i+1}^h tak, že $\sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) - f(\xi_{i+1}^h) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ a $f(\xi_{i+1}^d) - \inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Pak $\sigma(f,D,\xi^d) - s(f,D) < \frac{\varepsilon}{4}$ a $S(f,D) - \sigma(f,D,\xi^h) < \frac{\varepsilon}{4}$. Pak $A - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,D) \leq S(f,D) < A + \frac{\varepsilon}{2}$, tedy Riemannův integrál existuje dle lemma 3.1 a rovnost $\int_a^b f(x)dx = A$ dostaneme limitním přechodem.

$\square$

Otázka: Nechť má funkce f na intervalu $[a,b]$ Riemannův integrál. Které z následujících tvrzení platí?

a) Uvažujme libovolné dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$, pak existuje $\xi \in N(D)$ takové, že $\sigma(f,D,\xi) = \int_a^b f(x)dx$.

b) Je-li f spojitá na intervalu $[a,b]$ a $D \in \mathcal{D}(a,b)$, pak existuje $\xi \in N(D)$ takové, že $\sigma(f,D,\xi) = \int_a^b f(x)dx$.

c) Pro libovolné dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$ a libovolnou volbu $\xi \in N(D)$ platí $\sigma(f,D,\xi) \neq \int_a^b f(x)dx$.

d) Pro libovolné dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$ existuje $\xi \in N(D)$ takové, že $\sigma(f,D,\xi) \neq \int_a^b f(x)dx$.

Odpověď:

a) Neplatí. Uvažujme interval $[0,1]$ a funkci $f(x) = 1,\ x \in [0,\frac{1}{2}]$, a $f(x) = 0,\ x \in (\frac{1}{2},1]$. Dále uvažujme dělení $D = \{0, \frac{1}{3}, 1\}$, pak $\sigma(f,D,\xi)$ nabývá hodnoty $\frac{1}{3}$ nebo 1, dle toho, zda x_2 leží v intervalu $[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ nebo v intervalu $(\frac{1}{2},1]$. $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Tedy $\int_0^1 f(x)dx \neq \sigma(f,D,\xi)$.

b) Platí. Nechť $D \in \mathcal{D}(a,b)$ a $x_i, x_{i+1} \in D$. Pak $\inf_{x\in[x_i,x_{i_1}]} f(x) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \leq \sup_{x\in[x_i,x_{i_1}]} f(x) \cdot (x_{i+1} - x_i)$, tedy

$$\inf_{x\in[x_i,x_{i_1}]} f(x) \leq \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx}{x_{i+1} - x_i} \leq \sup_{x\in[x_i,x_{i_1}]} f(x).$$

Jelikož spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá všech hodnot mezi minimem a maximem (infimem a supremem), existuje bod $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ takový, že $f(\xi_i) = \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx}{x_{i+1}-x_i}$. Při této volbě bodů ξ_i dostaneme rovnost $\sigma(f,D,\xi) = \int_a^b f(x)dx$.

c) Neplatí. Stačí zvolit konstantní fuknci, pak $\sigma(f, D, \xi) = \int_a^b f(x)dx$.

d Neplatí. Viz bod c).

Příklad 3.3 *Nalezněte integrál* $\int_0^1 xdx$.

Využijeme předchozí větu, tedy

$$\int_0^1 xdx = \lim_{\Delta D \to 0} \sigma(x, D, \xi).$$

Zvolme $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1\}$ *a* $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$, *pak*

$$\sigma(x, D_n, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(1+n)\frac{n}{2}}{n^2}, tedy$$

$$\int_0^1 xdx = \lim_{n\to\infty} \sigma(x, D_n, \xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)\frac{n}{2}}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Příklad 3.4 *Nalezněte integrál* $\int_0^2 x^2 dx$.

Zvolme $D_n = \{0, \frac{1}{n}, ..., \frac{2n-1}{n}, 2\}$ *a* $\xi = \{\xi_i = \frac{i}{n}\}_{i=1}^{2n}$. *Pak*

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 dx &= \lim_{n\to\infty} \sigma(x^2, D_n, \xi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{i^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{2n} i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{16n^3 + 12n^2 + 2n}{6n^3} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Příklad 3.5 *Nalezněte integrál* $\int_0^1 e^x dx$.

Zvolme $D_n = \{0, \frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\}$ *a* $\xi = \{\xi_i = \frac{i-1}{n}\}_{i=1}^{n}$. *Pak*

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x dx &= \lim_{n\to\infty} \sigma(e^x, D_n, \xi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i-1}{n}} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{i}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{1 - e^{\frac{n}{n}}}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = (1-e) \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - e^{\frac{1}{n}}} \\ &= (1-e) \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1-e} = e - 1.\end{aligned}$$

Věta 3.6 *Nechť existují Riemannovy integrály* $\int_a^b f(x)dx$ *a* $\int_a^b g(x)dx$.

i) Pak existuje integrál $\int_a^b (f+g)(x)dx$ *a platí*

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

ii) Nechť $c \in \mathbb{R}$, *pak integrál z* $cf(x)$ *existuje a platí*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Důkaz

i)
$$\sigma(f+g,D,\xi) = \sigma(f,D,\xi) + \sigma(g,D,\xi).$$
Označme $\int_a^b f(x)dx = A$ a $\int_a^b g(x)dx = B$, pak $\forall \varepsilon > 0$ existuje δ_1, δ_2 takové, že pro D_1 splňující $\Delta D_1 < \delta_1$ a $\forall \xi_1 \in N(D_1)$ je $|\sigma(f,D_1,\xi_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ a pro D_2 splňující $\Delta D_2 < \delta_2$ a $\forall \xi_2 \in N(D_2)$ je $|\sigma(g,D_2,\xi_2) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$, tedy pro $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ platí, že pro libovolné dělení D splňující $\forall \Delta D < \delta$ a každé $\xi \in N(D)$ platí $|\sigma(f+g,D,\xi) - (A+B)| < \varepsilon)$.

ii) Snadné domácí cvičení.

□

Věta 3.7 *Je-li* $f \geq g$ *na* $[a,b]$ *a integrály* $\int_a^b f(x)dx$ *a* $\int_a^b g(x)dx$ *existují, pak*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Důkaz Označme $h = f - g$, pak $h(x) \geq 0$ na $[a,b]$, tedy

$$\sigma(h,D,\xi) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \int_a^b h(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

□

Věta 3.8 *Má-li* f *Riemannův integrál na* $[a,b]$, *má ho i* $|f|$ *a*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Důkaz

a) Existence: Platí
$$|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)|,$$
tedy
$$\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x)| - \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x)| \leq \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) - \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$$
pro všechna $x_i, x_{i+1} \in D$. Jelikož $S(|f|, D) - s(|f|, D) \leq S(f, D) - s(f, D)$ a z existence integrálu $\int_a^b f(x)dx$ a lemma 3.1 dostaneme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje D tak, že $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$, pak $S(|f|, D) - s(|f|, D) < \varepsilon$, a tedy integrál existuje (viz lemma 3.1).

b) Nerovnost: Jelikož
$$|\sigma(f, D, \xi)| = |\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) = \sigma(|f|, D, \xi),$$
plyne nerovnost z věty 3.5.

□

Věta 3.9 *Nechť existují integrály $\int_a^b f(x)dx$ a $\int_b^c f(x)dx$. Pak existuje integrál $\int_a^c f(x)dx$ a je roven $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.*

Důkaz Existence plyne přímo z lemma 3.1, stačí pro $\varepsilon > 0$ najít dělení D^1 pro $[a, b]$ a D^2 pro $[b, c]$ tak, že $S(f, D^1) - s(f, D^1) < \frac{\varepsilon}{2}$ a $S(f, D^2) - s(f, D^2) < \frac{\varepsilon}{2}$, a pak pro dělení D intervalu $[a, c]$, které obsahuje všechny dělící body dělení D^1 a D^2, platí $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$. Nechť D je dělení intervalu $[a, c]$ takové, že b je dělícím bodem dělení D, pak D určuje dělení D^1, resp. D^2, intervalu $[a, b]$, resp. $[b, c]$, a pro $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ dostaneme
$$\sigma(f, D, \xi) = \sigma(f, D^1, \xi^1) + \sigma(f, D^2, \xi^2).$$
Pravá strana má pro $\Delta D \to 0$ limitu $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, a proto ji má i levá strana.

□

Věta 3.10 *Existence ani hodnota integrálu se nemění, změníme-li funkci na konečně mnoha bodech.*

Důkaz Nechť $g(x) = f(x)$ na $[a, b] \setminus \{c\}$, pak

$$|\sigma(f, D, \xi) - \sigma(g, D, \xi)| \leq 4K\Delta D,$$

kde $K = \max\{\sup|f(x)|, \sup|g(x)|\}$. Dále limitním přechodem jako v přechozím důkazu. Obecný případ (více bodů, kde se funkce f a g nerovnají) dostaneme tak, že použijeme opakovaně tento speciální případ (funkce f a g se nerovnají v jednom bodě).

□

Věta 3.11 (Postačující podmínky pro existenci integrálu) *Je-li f omezená a spojitá na $[a, b]$ až na konečně mnoho bodů, pak má na $[a, b]$ Riemannův integrál.*

Důkaz Stačí dokázat pro funkci spojitou a omezenou na $(a, b]$ a pak využít větu 3.9. Nechť $\varepsilon > 0$ a nechť $M = |f| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, dále nechť $\tilde{a} \in (a, a + \frac{\varepsilon}{4M})$. Jelikož f je spojitá na $[\tilde{a}, b]$, má na tomto intervalu integrál. Pak existuje dělení $D' = \{x_1 = \tilde{a}, x_2, ..., x_n = b\}$ tak, že $S(f, D') - s(f, D') < \frac{\varepsilon}{2}$ (lemma 3.1). Označmě $D = \{x_0 = a, x_1, ..., x_n = b\}$, kde $x_1, ..., x_n$ jsou dělící body dělení D', pak

$$\begin{aligned} S(f, D) - s(f, D) &= \sup_{x\in[a,\tilde{a}]} f(x) + S(f, D') - (\inf_{x\in[a,\tilde{a}]} f(x) + s(f, D')) \\ &= \sup_{x\in[a,\tilde{a}]} f(x) - \inf_{x\in[a,\tilde{a}]} f(x) + S(f, D') - s(f, D') \\ &< 2M(\tilde{a} - a) + \frac{\varepsilon}{2} < 2M\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Věta 3.12 *Nechť je f monotónní na $[a, b]$, pak má na $[a, b]$ Riemannův integrál.*

Důkaz Uvažujme f neklesající. Pro $N \in \mathbb{N}$ označme D_n dělení $[a, b]$ s dělícími body $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ a $M_i = f(x_i)$, $m_i = f(x_{i-1})$, pak

$$\begin{aligned} S(f, D_n) - s(f, D_n) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(M_i - M_{i-1}) = \frac{b-a}{n}(M_n - M_0) \\ &= \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}. \end{aligned}$$

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ stačí zvolit $n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$ a dostaneme $S(f, D_n) - s(f, D_n) < \varepsilon$, tedy integrál existuje dle lemma 3.1.

□

Definice 3.9 *Je-li $a > b$, definujeme*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

pokud druhý integrál existuje.

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3.1 Newtonův integrál

Věta 3.13 *Nechť f má Riemannův integrál na každém uzavřeném intervalu, který leží v intervalu J. Označme $F_c(x) = \int_c^x f(t)dt$, kde $c, x \in J$ (c je zvoleno pevně). Pak pro funkci $F_c(x)$ platí:*

1) $F_c(x)$ je spojitá na J.

2) Je-li f spojitá v bodě x_0, pak $F_c'(x_0) = f(x_0)$.

3) Pro libovolné $c_1, c_2 \in J$ je $F_{c_1}(x) - F_{c_2}(x)$ konstantní funkce na J.

Důkaz

1) Nechť x_0 je vnitřním bodem intervalu J, tedy existuje $\delta > 0$ tak, že $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset J$, pak

$$|F_c(x_0 + h) - F_c(x_0)| = |\int_c^{x_0+h} f(x)dx - \int_c^{x_0} f(x)dx| = |\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx| \leq M|h|,$$

kde $M = \sup_{x\in J} |f(x)|$. Tedy

$$\lim_{h\to 0} |F_c(x_0 + h) - F_c(x_0)| = 0 \quad \Rightarrow \lim_{h\to 0} F_c(x_0 + h) = F_c(x_0).$$

Obdobně pro krajní body x_0 intervalu J.

2) Nechť x_0 je vnitřní bod intervalu J, chceme ukázat, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right| &= \frac{1}{h}\left|\int_c^{x_0+h} f(x)dx - \int_c^{x_0} f(x)dx - hf(x_0)\right| \\
&= \frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dx\right| \\
&= \frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)-f(x_0)dx\right| \\
&\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(x)-f(x_0)|dx.
\end{aligned}
$$

Jelikož f je spojitá v x_0, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pro $|x - x_0| < \delta$, tedy pro $h < \delta$ platí $|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$. Pak dostaneme

$$
\frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)-f(x_0)dx\right| \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(x)-f(x_0)|dx \leq \frac{1}{h}(h\varepsilon) = \varepsilon,
$$

tedy

$$
\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0).
$$

3)

$$
F_{c_1}(x) - F_{c_2}(x) = \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt.
$$

□

Důsledek 3.14 *Je-li f spojitá na intervalu J, pak má na J primitivní funkci. Pro $c \in J$ je primitivní funkce, která je v bodě c rovná nule, dána předpisem*

$$
F(x) = \int_c^x f(t)dt.
$$

Věta 3.15 (Newtonova formule) *Nechť f je spojitá na $[a, b]$, pak*

$$
\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)
$$

pro libovolnou primitivní funkci F a f na $[a, b]$.

Důkaz Pro $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ platí

$$F_a(b) - F_a(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Je-li F libovolná primitivní funkce k f na $[a, b]$, pak $F(x) = F_a(x) + c$, kde c je reálná konstanta, tedy

$$F(b) - F(a) = (F_a(b) + c) - (F_a(a) + c) = F_a(b) - F_a(a) = F_a(b) = \int_a^b f(t)dt.$$

$\square$

Poznámka 3.2 *Píšeme*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b.$$

Příklad 3.6

$$\int_0^5 e^x dx.$$

Jelikož primitivní funkce k $f(x) = e^x$ *je* $F(x) = e^x$, *pak*

$$\int_0^5 e^x dx = [e^x]_0^5 = e^5 - 1.$$

Věta 3.16 (integrace per partes) *Nechť* f', g' *jsou spojité na* $[a, b]$. *Potom*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Důkaz Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f'g$, pak podle věty 2.3 je $G = fg - F$ primitivní funkce k fg'. Dle předchozí věty je tedy

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [fg - F]_a^b = [fg]_a^b - [F]_a^b = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

$\square$

Příklad 3.7

$$\int_0^5 xe^{2x}dx = \left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_0^5 - \int_0^5 \frac{e^{2x}}{2}dx = 5e^5 - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^5 = 5e^5 - (\frac{e^5}{4}0 - 1) = 1 + e^5\frac{19}{4}.$$

Příklad 3.8

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n-1} x \sin x dx \\
&= [-\cos x \sin^{2n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot (2n-1) \sin^{2n-2} x \cos x dx \\
&= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x) \sin^{2n-2} x dx = (2n-1)(I_{n-1} - I_n) = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.
\end{aligned}$$

Jelikož

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2},$$

pak

$$I_n = \frac{\pi \prod_{i=1}^n (2i-1)}{2^{n+1} n!}.$$

Věta 3.17 *Nechť φ' je spojitá na $[a,b]$ a f je spojitá na $\varphi([a,b])$, pak*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Je-li $\varphi' \neq 0$, je také

$$\int_A^B f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(A)}^{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Důkaz Oba integrály existují dle věty 3.3. Je-li $F(x)$ primitivní funkce k f, je $F(\varphi(t))$ primitivní funkce k $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, a tedy

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = [F]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = [F(\varphi)]_a^b = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

□

Příklad 3.9

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left| \begin{matrix} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{matrix} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

3.2 Věty o střední hodnotě

Věta 3.18 *Nechť má f na intervalu $[a,b]$ Riemannův integrál. Je-li $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ a $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, potom existuje $c \in [m,M]$, že platí*

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

Je-li navíc funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$, pak existuje $\xi \in [a,b]$, že

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Důkaz Jelikož $m \leq f(x) \leq M$ na intervalu $[a,b]$, tak dle věty 3.7 dostaneme $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$, tedy $m \leq \int_a^b \frac{f(x)}{b-a}dx \leq M$. Z existence integrálu na $[a,b]$ plyne existence $c = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

Je-li f spojitá na $[a,b]$, pak pro každé $c \in [m,M]$ existuje $\xi \in [a,b]$ tak, že $f(\xi) = c$ (viz. věta o nabývání všech mezihodnot - první semestr). Z předchozí části pak dostaneme požadované tvrzení.

$\square$

Věta 3.19 *Nechť reálné funkce f a g mají na $[a,b]$ Riemannův integrál a g je na $[a,b]$ nezáporná (nekladná). Je-li $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ a $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, potom existuje $c \in [m,M]$, že platí*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = c\int_a^b g(x)dx.$$

Je-li navíc f spojitá na $[a,b]$, pak existuje $\xi \in [a,b]$ tak, že

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Důkaz Je-li $g(x) \geq 0$ na $[a,b]$, pak dostaneme $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, tedy dle věty 3.7 $m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$. Je-li $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, pak stačí zvolit $c = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$. Pro $\int_a^b g(x)dx = 0$ je i $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ a tedy platí rovnost pro libovolné c.

Je-li f spojitá, postupujeme jako v předchézím důkazu, tj pro libovolné $c \in [m,M]$ existuje $\xi \in [a,b]$ takové, že $f(\xi) = c$, dále viz. předchozí postup.

$\square$

3.3 Zobecněný Riemannův integrál

Definice 3.10 *i) Nechť má funkce f Riemannův integrál na každém intervalu $[a, \beta]$ pro každé $\beta \in [a, b)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $b > a$. Existuje-li vlastní limita $\lim_{\beta \to b_-} \int_a^\beta f(x)dx = A$, pak toto číslo nazveme zobecněným Riemannovým integrálam funkce f na intervalu $[a, b]$. Obdobně postupujeme pro interval $(a, b]$.*

ii) Nechť J je interval s koncovými body $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Existují-li body $x_1 < x_2 < ... < x_n \in (a, b)$ tak, že funkce f má zobecněný Riemannův integrál na každém z intervalů $[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], ..., [x_n, b]$ rovný $A_0, ..., A_n$, potom číslo $\sum_{i=0}^n A_i$ nazýváme zobecněným Riemannovým integrálem funkce f na intervalu $[a, b]$.

Příklad 3.10

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \lim_{x\to\infty} [\mathrm{arctgt}]_0^x = \lim_{x\to\infty} \mathrm{arctg}x = \frac{\pi}{2}.$$

Příklad 3.11

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \lim_{x\to 0_+} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dx = \lim_{x\to 0_+} \left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_x^1 = \lim_{x\to 0_+} (2 - \sqrt{x}) = 2.$$

3.4 Aplikace Integrálu

Délka křivky v $\mathbb{R}^d$: Pro určení délky křivky budeme tuto křivku aproximovat lomenou čárou a budeme zkoumat, jestli se při zjemňování dělení (přesnější aproximaci) součet délek lomených čar blíží k nějakému číslu. Toto číslo pak nazveme délkou křivky.

Omezíme se na případ jednoduché křivky třídy $\mathcal{C}^1$, tj. křivky určené parametrizací

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_d(1)), \quad t \in [a, b],$$

kde zobrazení φ je prosté na $[a, b]$, $\varphi_i'(t)$ jsou spojité na $[a, b]$ a $\varphi' = (\varphi_1', ..., \varphi_d') \neq 0$.

Nechť $D = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ je dělení $[a, b]$ a položme

$$\psi_n(t) = \varphi(t_{i-1}) + \frac{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}), \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, ..., n.$$

Pak délka l_n lomené čáry ψ je

$$l_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^d (\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1}))^2}.$$

$$
\begin{aligned}
l_n &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (\varphi_j'(\xi_{i,j})(t_i - t_{i-1}))^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (\varphi_j'(\xi_{i,j}))^2} (t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}
$$

Pokud by $\xi_{i,1} = \xi_{i,2} = ... = \xi_{i,d}$, tak by l_n byl Riemannovým součtem funkce $\sqrt{\sum_{j=1}^{d} (\varphi_j'(t))^2}$ při dělení D a body $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ a tedy délka křivky φ by byla určena integrálem

$$
\int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (\varphi_j'(t))^2} dt.
$$

Stačí tedy ukázat, že pro zjemňující dělení konverguje výraz

$$
|\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (\varphi_j'(\xi_{i,j}))^2} (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (\varphi_j'(\xi_i))^2} (t_i - t_{i-1})|
$$

k nule.

Platí

$$
\left| \sqrt{\sum_{j=1}^{d} a_j^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^{d} b_j^2} \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (a_j - b_j)^2} \leq \sum_{j=1}^{d} |a_j - b_j|.
$$

Tedy pro tak jemné dělení D, že $|\varphi_j'(t) - \varphi_j'(s)| < \varepsilon$ pro všechna $t, s \in [a, b]$ splňující $|t - s| < \Delta D$, platí:

$$
\left| \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (\varphi_j'(\xi_{i,j}))^2} (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (\varphi_j'(\xi_i))^2} (t_i - t_{i-1}) \right| \leq
$$

$$
\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{d} |\varphi_j'(\xi_{i,j}) - \varphi_j'(\xi_i)| (t_i - t_{i-1}) \leq d\varepsilon(b - a).
$$

Tedy pro $\Delta D \to 0$ konverguje l_n k integrálu $\int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (\varphi_j'(t))^2} dt$.

Poznámka 3.3 *Snadno ukážeme, že pro křivku zadanou ve tvaru* $y = f(x), \quad x \in [a, b]$ *je délka*

$$
l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.
$$

Příklad 3.12 *Určete délku křivky $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, \pi]$.*

$$l = \int_0^\pi \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^\pi 1 dt = \pi.$$

Objem rotačního tělesa: Je-li f nezáporná spojitá funkce na $[a, b]$ a je-li V těleso, které dostaneme otáčením grafu funkce kolem osy x, potom jeho objem je roven

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Příklad 3.13 *Určete objem koule o poloměru R. Funkce f je určena predpisem $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ na $[R, R]$, tedy*

$$V = \pi \int_{-R}^R R^2 - x^2 = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \pi(2R^3 - \frac{2R^3}{3}) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Povrch rotačního tělesa: Je-li f spojitá na intervalu $[a, b]$ a má na tomto intervalu spojitou derivaci, pak lze povrch pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky, jež je grafem funkce f, kolem osy x, vypočítat jako

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Příklad 3.14 *Určete povrch koule o poloměru R.*

$$P = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} dx = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx$$
$$= 2\pi R \int_{-R}^R 1 dx = 4\pi R^2.$$